

**FACULDADE DE INHUMAS – FACMAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU
MESTRADO EM EDUCAÇÃO**

AMANDA FELIX OLIVEIRA

**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NA APLICAÇÃO DE CURVAS
PLANAS COM ÊNFASE NO DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO**

**INHUMAS-GO
2022**

AMANDA FELIX OLIVEIRA

**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NA APLICAÇÃO DE CURVAS
PLANAS COM ÊNFASE NO DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Inhumas – FacMais –, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Linha de Pesquisa: Educação, Instituições Políticas Educacionais.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Máximo da Purificação.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
BIBLIOTECA CORA CORALINA - FacMais

O48u

OLIVEIRA, Amanda Felix.

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NA APLICAÇÃO DE CURVAS PLANAS COM ÊNFASE NO DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO. Amanda Felix Oliveira. – Inhumas: FacMais, 2022.

86 p.: il.

Dissertação (mestrado) - Centro de Educação Superior de Inhumas - FacMais, Mestrado em Educação, 2022.

“Orientação: Marcelo Máximo da Purificação.”.

1. Escola; 2. Educação Matemática; 3. GeoGebra; 4. Teoria do Ensino Desenvolvimental. I. Título.

CDU: 37

AMANDA FELIX OLIVEIRA

**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NA APLICAÇÃO DE CURVAS PLANAS
COM ÊNFASE NO DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO**

Aprovada em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Máximo da Purificação
(Faculdade de Inhumas – FACMAIS)

Profa. Dra. Maria Luiza da Silva Santana
(Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB)

Profa. Dra. Lucineide Maria de Lima Pessoni
(Faculdade de Inhumas – FACMAIS)

AGRADECIMENTOS

Eu agradeço, primeiramente, ao meu orientador, Dr. Marcelo Máximo da Purificação por contribuir na realização do meu sonho; a minha família, especialmente, a minha mãe, uma pessoa segura e firme, e, a Genoveva Prima de Freitas, por estar presente em minha caminhada acadêmica.

Concluo dizendo: “ninguém é nada sozinho”!

Ninguém nasce feito, é experimentando-nos no mundo que nós nos fazemos.

(Paulo Freire).

OLIVEIRA, Amanda Felix. **O uso do software GeoGebra na aplicação de curvas planas com ênfase no desenvolvimento matemático**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Inhumas – FACMAIS, 2022.

RESUMO

Este estudo, desenvolvido na Linha de Educação, Instituições Políticas Educacionais, do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, da Faculdade de Inhumas (FACMAIS) aborda “o uso do software GeoGebra na aplicação de curvas planas, com ênfase no desenvolvimento matemático” a fim de de apresentar elementos teóricos que tratam da importância do uso de recursos tecnológicos no campo da educação, particularmente, no campo da matemática. Tem como objetivo geral verificar a utilização do uso do software GeoGebra na aplicação de curvas planas e no desenvolvimento matemático. Seguido dos seguintes objetivos específicos: Destacar possíveis rastros dialógicos entre a Teoria do Ensino Desenvolvimental com as potencialidades para o ensino da Matemática; apresentar o GeoGebra e suas potencialidades para o Ensino da Matemática, a partir da perspectiva de trabalhos já desenvolvidos e citar elementos de intersecções entre o GeoGebra, os conteúdos de Curvas Planas e a Teoria do Ensino Desenvolvimental. Trata-se de um estudo qualitativo de cunho bibliográfico. Os resultados pontuam que o uso pedagógico do software GeoGebra na prática de matemática pode colaborar de forma significativa para o desenvolvimento de uma educação de qualidade e, conseqüentemente na aprendizagem do aluno que poderá acompanhar o posicionamento de um ponto na estrutura da curva, de forma a compreender não apenas os traços que são demarcados, assim como os demais elementos que estabelecem liames com o conteúdo de curvas planas, os quais citamos velocidade, aceleração e coordenadas. Para além disso, vimos que estudo nessa direção também pode colaborar na reflexão e direcionar mudanças na percepção dos alunos de forma a refinar sua atividade mental e despertar seu interesse pela aprendizagem matemático.

Palavras-chave: Escola. Educação Matemática. GeoGebra. Teoria do Ensino Desenvolvimental.

OLIVEIRA, Amanda Felix. **The use of geogebra software in the application of plane curves with an emphasis on mathematical development.** Dissertation (Master in Education) – Faculty of Inhumas – FACMAIS, 2022.

ABSTRACT

This study - developed in the Education Line, Educational Policy Institutions, of the Stricto Sensu Graduate Program in Education, Faculty of Inhumas (FACMAIS) addresses, "the use of GeoGebra software in the application of plane curves with emphasis on mathematical development" with the purpose of presenting theoretical elements that deal with the importance of the use of technological resources in the field of education, particularly in the field of mathematics. Its general objective is to verify the use of the use of the GeoGebra software in the application of plane curves and in the mathematical development. Followed by the following specific objectives: Highlight possible dialogic traces between the Theory of Developmental Teaching with the potential for teaching Mathematics; present Geogebra and its potential for Teaching Mathematics, from the perspective of works already developed and cite elements of intersections between Geogebra, the contents of Flat Curves and the Theory of Teaching the Developmental. This is a qualitative bibliographic study. The results point out that the pedagogical use of GeoGebra software in the practice of mathematics can contribute significantly to the development of a quality education and, consequently, in the student's learning, who will be able to follow the positioning of a point in the structure of the curve, in order to understand not only the traces that are demarcated, as well as the other elements that establish bonds with the content of flat curves, which we mentioned speed, acceleration and coordinates. In addition, we have seen that study in this direction can also collaborate in reflection and direct changes in students' perception in order to refine their mental activity and awaken their interest in mathematical learning.

Keywords: School. Mathematics Education. Geogebra. Theory of Developmental Teaching.

OLIVEIRA, Amanda Félix. **El uso del software GeoGebra en la aplicación de curvas planas con énfasis en el desarrollo matemático**. Disertación (Maestría en Educación) – Facultad de Inhumas – FACMAIS, 2022.

RESUMEN

Este estudio - desarrollado en la Línea de Educación, Instituciones de Política Educativa, del Programa de Posgrado en Educación Stricto Sensu, Facultad de Inhumas (FACMAIS) aborda, "el uso del software GeoGebra en la aplicación de curvas planas con énfasis en el desarrollo matemático" con el propósito de presentar elementos teóricos que traten sobre la importancia del uso de los recursos tecnológicos en el campo de la educación, particularmente en el campo de las matemáticas, tiene como objetivo general comprobar el aprovechamiento del uso del software GeoGebra en la aplicación de curvas planas y en el desarrollo matemático, seguido de los siguientes objetivos específicos: Destacar posibles huellas dialógicas entre la Teoría de la Enseñanza del Desarrollo con el potencial para la enseñanza de las Matemáticas, presentar Geogebra y su potencial para la Enseñanza de las Matemáticas, desde la perspectiva de trabajos ya desarrollados y citar elementos de intersecciones entre Geogebra, los contenidos de Curvas Planas y la Teoría de la Enseñanza el desarrollista. Se trata de un estudio bibliográfico cualitativo. Los resultados apuntan que el uso pedagógico del software GeoGebra en la práctica de las matemáticas puede contribuir significativamente al desarrollo de una educación de calidad y, consecuentemente, en el aprendizaje del alumno, quien podrá seguir el posicionamiento de un punto en la estructura de la curva, para comprender no sólo las trazas que se delimitan, sino también los demás elementos que establecen vínculos con el contenido de las curvas planas, entre los que mencionamos la velocidad, la aceleración y las coordenadas. Además, hemos visto que el estudio en esta dirección también puede colaborar en la reflexión y dirigir cambios en la percepción de los estudiantes para afinar su actividad mental y despertar su interés por el aprendizaje matemático.

Palabras clave: Escuela. Educación Matemática. Geogebra. Teoría de la enseñanza del desarrollo.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Tela de trabalho do GeoGebra46
- Figura 2 – Opção Habilitar Rastro e Animar47
- Figura 3 – Comando *Ponto*48
- Figura 4 – Exemplo do uso do comando *Tangente*49
- Figura 5 – Retas perpendiculares49
- Figura 6 – Exemplo Sequência50
- Figura 7 – Curva gerada por spline com 3 pontos51
- Figura 8 – Curva criada por um spline de grau 352
- Figura 9 – Parábola definida pelo comando *Curva*52
- Figura 10 – Parábola definida pelo comando *Curva* 253
- Figura 11 – Exemplo do comando *Vetor*54
- Figura 12 – Uso da ferramenta *Projeção*56
- Figura 13 – Elipse com $a = 6$ e $b = 158$
- Figura 14 – Cicloide e seu vetor tangente em $t = \pi$ 59
- Figura 15 – Exemplo de variação do parâmetro t 060
- Figura 16 – Exemplo do uso da ferramenta *VetorTangente*60
- Figura 17 – Evolutas63
- Figura 18 – Trocoide com $b > R$ 64
- Figura 19 – Trocoide com $b < R$ 64
- Figura 20 – Pontos da lista *L*67
- Figura 21 – Aproximação da Cicloide pelo comando *Spline*67
- Figura 22 – Retas tangentes à Evoluta da Cicloide68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PISA	- Programa Nacional de Avaliação do Aluno
PUC-GO	- Pontifícia Universidade Católica de Goiás
TICs	- Tecnologias da Informação e Comunicação
TPACK	- Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo
ZPD	- Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO6

CAPÍTULO 1 – A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV E SUAS POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA12

1.1 NO RASTRO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV E SUAS PERSPECTIVAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA12

1.2 O PAPEL DOCENTE NO ENSINO DESENVOLVIMENTAL28

1.3 A TEORIA DA ATIVIDADE E O ENSINO DA MATEMÁTICA31

CAPÍTULO 2 – ASPECTOS SIGNIFICATIVOS NO USO DAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA34

2.1 AS TECNOLOGIAS NA SALA DE AULA34

2.2 O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA TECNOLÓGICA DE APOIO À APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA MATEMÁTICA39

2.3 ALGUNS ESTUDOS DESENVOLVIDOS ENVOLVENDO TECNOLOGIA E GEOGEBRA42

CAPÍTULO 3 – O SOFTWARE GEOGEBRA E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONTEÚDO DE CURVAS PLANAS45

3.1 O SOFTWARE GEOGEBRA COMO ARTEFATO45

3.1.1 Alguns Comandos do Geogebra47

3.1.2 A construção de ferramentas54

3.2 CURVAS PLANAS56

3.2.1 Curvas parametrizadas e diferenciáveis56

3.2.2 Vetor tangente58

3.2.3 Curvas Regular60

3.2.4 Comprimento do Arco61

3.2.5 Mudança de Parâmetro61

3.2.6 Interfaces GeoGebra e Curvas Planas62

3.2.7 Investigação matemática com GeoGebra63

3.2.8 Trocoides64

3.2.9 Interfaces entre as tecnologias e as Teorias Desenvolvimentista68

CONSIDERAÇÕES FINAIS70

REFERÊNCIAS72

INTRODUÇÃO

Este estudo – desenvolvido na Linha de *Educação, Instituições Políticas Educacionais*, do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, da Faculdade de Inhumas (FACMAIS) – aborda “o uso do software GeoGebra na aplicação de curvas planas, com ênfase no desenvolvimento matemático”, a fim de apresentar elementos teóricos que tratam da importância do uso de recursos tecnológicos no campo da educação, particularmente, no campo da matemática.

Tem-se como objetivo geral, promover a reflexão sobre o desenvolvimento do conhecimento, com o uso do software GeoGebra e o ensino da matemática; e como objetivos específicos, verificar a utilização do software GeoGebra na aplicação de curvas planas e no desenvolvimento matemático; resolver atividades matemáticas em sala de aula por meio desta ferramenta tecnológica; refletir sobre o desenvolvimento do conhecimento, com base na teoria do ensino do desenvolvimento, aplicando GeoGebra.

Trata-se de um estudo bibliográfico, que buscou responder a questão de uma pesquisa a respeito de como a teoria do desenvolvimento pode contribuir para o desenvolvimento matemático dos alunos, utilizando o software GeoGebra, na aplicação do conteúdo de Curvas Planas, como dispositivo pedagógico que seja possível realizar investigações.

Destaca-se que a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov no processo de ensino aprendizagem de conceitos científicos e um diálogo com a teoria da Atividade, desenvolvida por Leontiev, expõe-se que o indivíduo se desenvolve melhor quando se relaciona com o meio no qual está inserido. O estudo com as evolutas foi feito sobre o olhar do ensino desenvolvimental e da teoria da atividade, tendo como recurso tecnológico potencializador o software GeoGebra.

A escola, em sua essência, configura-se como um espaço para a construção de práticas pedagógicas, de atividades curriculares e de desenvolvimento do aluno. Assim, é importante pensar o espaço escolar em sua amplitude e diversidade onde alunos, professores e profissionais vivenciam as ações educativas, levando em consideração o ambiente em que está inserido e permitindo uma aprendizagem plena de sentido e de significado para o aluno.

A educação tem um papel social relevante no contexto sócio-histórico, pois é capaz de transformar o ser humano em um sujeito consciente e comprometido com

a transformação do meio em que vive. Como um processo complexo que é a educação, aqui buscamos apresentar o Ensino Desenvolvimental como uma teoria de caráter prático – metodológico, organizada para promover o desenvolvimento do pensamento teórico e formar integralmente o aluno, tendo na escola, um papel importante, por meio de seus professores, mediadores que incentivam e propõem condições, métodos e recursos atualizados, a fim de garantir conhecimentos teóricos e práticos, possíveis à aprendizagem significativa e ao desenvolvimento cultural dos alunos. Embora a construção da educação no Brasil tenha uma história de vários anos, o país enfrenta muitas dificuldades e a mudança nem sempre é fácil.

Nessa perspectiva, recorreremos a teóricos dedicados à educação transformadora, como Davydov e Vygotsky, que defendem a teoria do ensino desenvolvimental (propõe desenvolver a capacidade mental, o cognitivo dos alunos, por meio dos conteúdos) com a aplicação pedagógica da teoria histórico-cultural (busca-se a aproximação do aluno com o objeto de conhecimento por meio de elementos presentes em seu cotidiano, o que facilita e promove o processo de aprendizagem de forma efetiva). Vygotsky (1984) sustenta que o desenvolvimento cognitivo do aluno passa pela interação com outras pessoas e com o meio em que está inserido, pois pensa que a aprendizagem é uma experiência social, mediada pela interação entre linguagem e ação. Davydov afirma que o desenvolvimento mental do aluno é fundamental e depende da forma de como o professor se organiza pedagogicamente, pois o objetivo principal da atividade docente é a reflexão teórica, alinhada ao fazer prático, que por consequência, permite o desenvolvimento de aprendizagens.

A escolha do software GeoGebra na aplicação de curvas planas deve-se ao fato de ser um recurso dinâmico que permite a manipulação de conteúdos matemáticos, tanto em álgebra quanto em geometria. Assim, acredita-se que este software pode ajudar os alunos a perceberem os conteúdos matemáticos de diferentes maneiras, facilitando a apropriação de conceitos e proporcionando-lhes oportunidades e autonomia ao longo do processo de aprendizagem. Além disso, acreditamos na capacidade educacional para abordar tal recurso tecnológico em busca de ensino e de aprendizagem de qualidade.

Dessa forma, é preciso entender a viabilidade desse instrumento tecnológico (software GeoGebra) nas aulas de matemática e deixar claro que esse recurso educacional pode ser motivador, visando maior interesse por parte dos alunos e

maior interação entre eles e seus professores, em busca de uma aprendizagem dinâmica e interativa, pautada pelo raciocínio, pela criatividade e pela ludicidade. Nesse contexto, vale ressaltar a importância da educação brasileira contemporânea, do ponto de vista da teoria do ensino desenvolvimentista, que se propõe a desenvolver a capacidade mental e cognitiva dos alunos, por meio do conteúdo, ou seja, um ensino voltado para a formação de conceitos.

Vygotsky fez pesquisas sobre o desenvolvimento humano, particularmente o desenvolvimento infantil e como ele ajuda a orientar a construção do conhecimento. Ele concentrou seu trabalho educacional no interesse de compreender o desenvolvimento nos processos psicológicos humanos. Como psicólogo, explica que é preciso encontrar a relação da criança com o meio, sua vivência, como toma consciência da realidade, lhe dá sentido e se relaciona, afetivamente, com determinado acontecimento. Nesse modo de construção, o ambiente influencia o desenvolvimento, assim como outras situações, oferecendo a oportunidade de avaliar seu nível de compreensão, consciência e atribuição de significado a tudo o que acontece.

Nessa perspectiva teórica, entende-se que o ambiente influencia o desenvolvimento da criança, ou seja, o desenvolvimento humano é resultado de suas interações, devido à apropriação, pelo sujeito, dos resultados do desenvolvimento histórico-cultural por meio de suas práticas de atividade. Portanto, essa proposta de educação de qualidade requer teorias inovadoras, com ênfase na formação de professores, com orientação tecnológica, para que se tornem profissionais competentes, mediadores criativos e contextualizados, capazes de estimular qualitativamente os alunos, a construir, coletivamente, um processo de aprendizagem consciente e compatível, levando em conta as necessidades sociais e intelectuais dos alunos.

Assim, acredita-se que o uso pedagógico do software GeoGebra em atividades matemáticas pode melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos, pois envolve conhecimento, interesse, criatividade, prazer em aprender e o aluno pode movimentar objetos e investigar o que está sendo trabalhado. Nesse sentido, são necessárias reflexões, para a época atual, que visem uma escola comprometida com a realidade, com o desenvolvimento intelectual e relacional entre todos os envolvidos no processo educativo, garantindo, assim, um sistema educacional mais

dinâmico e produtivo que vai ao encontro de novos tempos, porque a tecnologia é algo que se desenvolve.

Ademais, a educação tem um papel social relevante no contexto sócio-histórico e as práticas educativas são, intencionalmente, organizadas para atender a determinadas expectativas educacionais exigidas por uma determinada comunidade social. Assim, o papel do ensino é justamente o de propiciar mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento teórico, de maneira que se forma junto com as capacidades e hábitos correspondentes. Nesse sentido, tendo na escola, um interlocutor competente, por meio de seus professores, verdadeiros mediadores que incentivam e propõem condições, métodos e recursos atualizados, possa garantir o conhecimento prático, possível à aprendizagem significativa e ao desenvolvimento cultural.

Para que ocorra a aprendizagem significativa, é necessário compreender o processo de mudança do conhecimento e reconhecer a importância dos processos mentais nesses desenvolvimentos. Segundo Ausubel (1982), são necessárias duas condições para que ocorra a aprendizagem significativa: primeira, que o aluno tenha vontade de aprender; segunda, o conteúdo acadêmico a ser aprendido deve ser, potencialmente, significativo, visto que ele tem que ser lógico e psicologicamente significativo, pois o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem.

Embora a construção da educação no Brasil tenha uma história de vários anos, o país enfrenta muitas dificuldades e as mudanças nem sempre são fáceis. Podemos perceber que o Brasil é pautado por uma educação que ainda tem muito a mudar e, de fato, precisa de uma educação atualizada, moderna e crítica, capaz de interferir profundamente no processo de aprendizagem inovador. Diante dessa realidade, recorreremos a teóricos dedicados à educação transformadora, como Davydov (1988) e Vygotsky (1991), que defendem o desenvolvimento mental do aluno, (e) por meio de um processo pedagógico dentro da teoria histórico-cultural.

Vygotsky (1991) sustenta que o desenvolvimento cognitivo do aluno passa pela interação com outras pessoas e com o meio em que está inserido, pois considera que a aprendizagem é uma experiência social, mediada pela interação entre linguagem e ação. Davydov (1988) afirma que o desenvolvimento mental do aluno é fundamental e depende de como o professor organiza, didaticamente, o

ensino, pois o objetivo principal da atividade docente é a reflexão teórica e, portanto, permite o desenvolvimento psíquico do indivíduo.

Assim, sabe-se que a base do pensamento de Davydov está centrada em Vygotsky, e que aprender e ensinar são formas universais de desenvolvimento mental. Assim, o ensino permite a apropriação da cultura e o desenvolvimento do pensamento, segundo dois processos que se articulam da seguinte forma: a) enquanto o aluno forma conceitos científicos, incorpora processos de pensamento e vice-versa; b) ao formar o pensamento teórico, desenvolve ações mentais, tomando e resolvendo problemas que despertam a atividade mental do aluno.

Nesse contexto, o papel da educação é promover mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento teórico que se forma com suas correspondentes habilidades e hábitos. Escreve Davydov (1988, p. 21):

Os conhecimentos de um indivíduo e suas ações mentais (abstração generalização) formam uma unidade. Segundo Rubinstein, 'os conhecimentos [...] não surgem dissociados da atividade cognitiva do sujeito e não existem sem referência a ele'. Portanto, é legítimo considerar o conhecimento, de um lado, como o resultado das ações mentais que, implicitamente, abrangem o conhecimento e, de outro, como um processo pelo qual podemos obter esse resultado no qual se expressa o funcionamento das ações mentais. Conseqüentemente, é aceitável usar o termo 'conhecimento' para designar o resultado do pensamento (o reflexo da realidade), quanto o processo pelo qual se obtém esse resultado (ou seja, as ações mentais). 'Todo conceito científico é, simultaneamente, uma construção do pensamento e um reflexo do ser'. Sob este ponto de vista, um conceito é, ao mesmo tempo, um reflexo do ser e um procedimento da operação mental.

Nesse cenário, a aprendizagem escolar é estruturada de acordo com o método de exposição do conhecimento científico, e o pensamento do aluno é desenvolvido na atividade de aprendizagem, ou seja, tem algo em comum com o pensamento dos cientistas que apresentam os resultados de suas pesquisas, usando abstrações, generalizações e conceitos teóricos.

Dessa forma, surge o desejo de trabalhar com esse tema, que começou na obtenção da Licenciatura em Matemática, na Pontifícia Universidade Católica de Goiás - PUC-GO, ocasião em que participei do grupo de estudos, coordenado pela professora Duelci Freitas Vaz, quando abordou aspectos específicos da matemática como: função, análise gráfica em função e núcleo do objeto, utilizando-se das possibilidades do software GeoGebra para materializar o ensino-aprendizagem da matemática, tornando-o mais dinâmico e atrativo. Depois, já como professora de

matemática substituta da Secretaria Estadual de Educação de Goiás e professora CLT na rede particular, vi, o quanto essa reflexão era importante e urgente.

Diante do exposto, apresentou-se que estudos nessa direção podem proporcionar aos atuais professores da área de matemática uma reflexão sistêmica de suas práticas em sala de aula, bem como o desenvolvimento da necessidade de conectar recursos tecnológicos a esta prática, como o GeoGebra, o que reverbera na aprendizagem do aluno. Sugere que o uso pedagógico de tecnologias nas práticas educativas desperte e sensibilize os alunos para o conhecimento e pode trazer melhorias para o processo de aprendizagem. Acredita-se que com a utilização do recurso tecnológico, a exemplo do software GeoGebra, é possível destacar a força com que os recursos didáticos atualizados interferem, incisivamente, na aprendizagem, de forma dinâmica e atrativa, permitindo também que o aluno investigue e faça suposições a partir do conteúdo apresentado. Este trabalho se encontra organizado em capítulos, conforme descrito a seguir.

No primeiro capítulo, destaca-se o dialogar com a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov e com suas potencialidades para o ensino da matemática. Ela propõe desenvolver a capacidade mental, o cognitivo dos alunos, por meio dos conteúdos. Um ponto de destaque dessa teoria é o ensino voltado para a formação de conceitos, ou seja, o aluno é protagonista do processo, e não simplesmente memoriza o que está pronto e acabado.

No segundo capítulo, apresenta-se o software GeoGebra e suas potencialidades para o ensino da matemática, ou seja, dos seus aspectos significativos para aplicabilidade do uso das tecnologias na educação matemática.

No terceiro capítulo, fala-se do trabalho realizado com software GeoGebra e das curvas planas tanto na construção, como nas investigações e nas conjecturas levantadas.

CAPÍTULO 1 – A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV E SUAS POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, busca-se apresentar alguns aspectos relativos à Teoria do Ensino Desenvolvidor de Davydov e traços de seus contributos para o ensino da matemática, no que tange à qualidade do processo de desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Esta proposta de uma educação de qualidade requer teorias inovadoras, que possam atuar de forma significativa na aprendizagem do aluno, que passa a interagir de forma mais proativa com os conteúdos matemáticos. O uso do software GeoGebra nas atividades matemáticas confirma que é possível entender melhor os conceitos científicos e o estudo do objeto, através de recursos tecnológicos que envolvem conhecimento, interesse, criatividade, prazer em aprender e resultados mais satisfatórios. Com isso, apresentamos neste capítulo perspectivas para o ensino da matemática, aportes sobre o papel docente no ensino desenvolvimental e alguns elementos da teoria da atividade e o ensino da matemática.

1.1 NO RASTRO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV E SUAS PERSPECTIVAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Davydov foi discípulo de Vygotsky, realizou seus estudos e pesquisas no final da segunda metade do século XX, como parte de um projeto mais amplo de transformações da escola e da sua qualidade. A teoria do ensino desenvolvimental propõe desenvolver a capacidade mental, o cognitivo dos alunos, por meio dos conteúdos, ou seja, o aluno participa da formação de conceito, e não simplesmente memoriza o que está pronto, acabado. Logo, a procura por um ensino de matemática de boa qualidade, pautado na contextualização e na aplicação dos conceitos adquiridos no cotidiano e em outras áreas de conhecimento, vem ressaltando a importância de uma aprendizagem baseada na compreensão e não apenas pautada na memorização de definições e de procedimentos.

Segundo Davydov (1988), para se chegar à essência de um determinado objeto, tem-se que estudar o desenvolvimento deste objeto, ou seja, precisa estudar sua epistemologia da construção do conhecimento deste objeto.

A teoria do ensino desenvolvimental, em foco atualmente, fruto de estudo de Vasily Vasilovich Davydov (1930/1998), um psicólogo russo que liderou o Instituto de Psicologia da Academia Russa de Educação e um dos fundadores da Comissão para o Estudo da Psicologia do Pensamento e da Lógica, parte do princípio de que a escola deve impulsionar o desenvolvimento mental e subjetivo dos alunos e instigá-los a pensar sobre os objetos e sobre questões da realidade, de modo dialético. Isto significa estimular o discente a perceber as mudanças, as contradições, as relações de dependência entre os objetos e suas condições concretas, temporais, históricas, como um todo estruturado. É um processo de ensino que busca proporcionar aos estudantes a apropriação de conceitos científicos, do desenvolvimento do pensamento e das capacidades para aquisição de novos conhecimentos. Davydov (1988) entendeu que a escola e o ensino são os principais meios de promoção do desenvolvimento psicológico e sociocultural do indivíduo e, portanto, defende que a educação escolar influencia, significativamente, no desenvolvimento dos alunos. Assim, a escola contribui para alterações na forma de pensar, de analisar e de compreender os objetos e suas relações com a realidade, o que deve ocorrer desde o início da escolarização.

Como psicólogo, Davydov (1988) apresenta as características psicológicas do ensino direcionado à formação do pensamento teórico-científico, de modo especial relativo à abstração, à generalização e à formação de conceitos, questionando o ensino baseado na lógica tradicional formal e repetitiva que acomoda e produz fracos resultados. Ele foca o modo pelo qual o professor organiza o ensino e o desenvolvimento das funções mentais dos estudantes.

Nesse sentido, na base do pensamento de Davydov está a ideia-mestra de Vygotsky que afirma ser a aprendizagem e o ensino, formas universais de desenvolvimento mental. L. S. Vygotsky foi o iniciador da teoria histórico-cultural e fundamentou-se na concepção materialista dialética do ser humano. Esta teoria se tornou uma corrente amplamente conhecida como escola histórico-cultural ou enfoque histórico-cultural, porque coloca em seu centro o sujeito que aprende e que desvela o vínculo do afetivo e do cognitivo como parte do caráter integral do psiquismo humano. Ademais, Davydov (1982) defende que o aspecto essencial da aprendizagem é o fazer, o despertar, o estimular e o ativar os processos internos de desenvolvimento da criança e assim vislumbrar que o meio é importante para despertar o discente.

De acordo com Davydov (1988), os alunos ao aprenderem uma nova matéria, devem se apropriar não apenas do resultado das investigações feitas, mas do processo de pensamento que foi utilizado nas investigações de um determinado objeto. Aprendendo dessa forma, eles desenvolverão as funções mentais ligadas ao objeto onde eles ainda não tinham desenvolvido.

Assim, ele acredita em um modelo de escola que ensine o aluno a pensar e a refletir sobre os objetos e questões acerca da realidade, em modo dialético. Isso exige levar o alunado a captar as mudanças, as contradições, as relações de dependência entre os objetos e suas condições temporais, concretas históricas, como um todo estruturado. Além disso, é um processo de ensino que busca revelar a origem, a essência e o desenvolvimento dos objetos, e tem-se uma escola capaz de transformar e de contribuir, com seus alunos, na forma de pensar, de analisar e de compreender os objetos da sua realidade e assim promover um desenvolvimento psicológico e sociocultural de qualidade.

Na concepção de Davydov, o conhecimento sistematizado pelas diferentes ciências representa a centralidade da atividade pedagógica, ou seja,

A premissa básica da educação para o desenvolvimento é que os métodos de ensino são derivados do conteúdo escolar. Para organizar o ensino, o professor formula um conjunto de tarefas que visam levar o aluno a formar os conceitos que, inter-relacionados em determinada área do conhecimento, compõem uma rede conceitual (FREITAS; ROSA, 2015, p. 8).

Desta forma, os alunos são estimulados, desde o início, a descobrir propriedades por si próprios, obrigando-os a olhar para as características essenciais e não essenciais e para as relações intrínsecas entre os objetos. Em relação à matemática, a proposição retornaria à formação de conceitos teóricos em relação ao conteúdo estudado.

Davydov (1988) destaca a importância de organizar atividades para serem utilizadas em sala de aula, pois permitem ao aluno obter conclusões científicas sobre o objeto e seus conceitos. Dessa forma, o ensino voltado para a formação de conceitos permite que os alunos sejam capazes de compreender a origem dos objetos de estudo.

Portanto, segundo Davydov (1988), as mudanças positivas no sistema educacional dependem, primeiramente, de como os pedagogos organizam o processo de ensino e educação na escola, de como a atividade de ensino-

aprendizagem é organizada e de como habilidades e conhecimentos podem ser apropriados pelos alunos. Como a Teoria Desenvolvimental propõe um ensino sistematizado, devidamente apresentado pelo docente, o professor deve fazer com que seus alunos sigam o movimento dialético de construção do conhecimento, assemelhando-se ao raciocínio utilizado pelos cientistas para construir os conceitos teóricos. Trata-se da proposta da Teoria do Ensino Desenvolvimental “[...] do ensino-aprendizagem que ressalta a influência da educação e do ensino no desenvolvimento dos alunos” (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 316); para que sejam atuantes pessoal e coletivamente na sociedade atual, aprendendo o aspecto genético e essencial do objetivo e a utilizar o método geral, onde eles conseguem resolver tarefas concretas, compreendendo a articulação entre o todo ou vice-versa.

Sendo assim, a teoria desenvolvimental define que as instruções são um sistema de método e de organização para elevar o indivíduo à experiência social e historicamente constituída, na qual a atividade de estudo possa produzir, no discente, mudanças qualitativas. Confirma-se que a verdadeira aprendizagem não está em adquirir conhecimento, mas em experimentar um processo de mudanças internas, de novas capacidades e de novos métodos de pensar conceitos científicos.

Para Davydoy (1988), as ações necessárias para que o discente estude um objeto, passa por etapas: a primeira ação é a transformação dos dados da tarefa, ou seja, o aluno deve descobrir as características gerais do objeto e refletir sobre os conceitos teóricos; a segunda é a modelação desta relação universal, ou seja, consiste na criação de um experimento formativo; na terceira, o aluno deve transformar o modelo de tal forma que possa realizar várias tarefas particulares, desenvolvendo procedimentos gerais descobertos por ele mesmo e a quarta, refere-se ao monitoramento das ações realizadas. Em seguida, professor e discentes avaliam as atividades realizadas e verificam se conseguiram alcançar uma aprendizagem satisfatória dos conceitos teóricos.

Para Vygotsky (1997), a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZPD) é uma região dinâmica de sensibilidade na qual acontece a transição do funcionamento interpsicológico para o funcionamento intrapsicológico pode ser feita. Neste sentido, esta formulação coloca em destaque a conversão de processos intersíquicos em intrapsíquicos, onde realça a necessidade da atividade sócia histórica e coletiva dos indivíduos na formação das funções mentais superiores. Pode-se dizer que na Zona de desenvolvimento proximal:

Define aquelas funções que ainda não têm amadurecimento, mas que estão em processo de maturação; funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário [...]. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (VYGOTSKY, 1991, p. 59).

Segundo a teoria vygotskyana, o aprendizado progride mais rápido que o desenvolvimento e é na ZPD que o mediador deve atuar e auxiliar, por meio da linguagem, na construção e na reconstrução do conhecimento dos seus aprendizes. Nesse sentido, o mediador, para ser eficiente, deve conhecer as ideias dos participantes e agir adequadamente na situação - problema, para que o participante entenda o desafio e alcance a zona de desenvolvimento proximal. Neste contexto, o mediador, para ser eficiente, deve conhecer as ideias dos participantes e agir, adequadamente, na situação – problema, para que o participante entenda os desafios e alcance a zona de desenvolvimento proximal, visto que o conhecimento é o resultado da interação sociocultural. Assim sendo, a origem dos processos de aprendizagem e de desenvolvimento humano está nas relações e na interação com outras pessoas. Por se tratar de uma estrutura organizada, de um conjunto de atividades a ser desenvolvido, o primeiro momento é a intervenção do docente e a seleção de quais materiais serão utilizados; o segundo, a observação e manipulação e por fim, o registro e a resolução.

Contudo, o que o ensino desenvolvimental requer do professor? Neste sentido, um ensino voltado para o desenvolvimento do pensamento teórico-científico busca do professor que eleve os seus alunos a “colocarem em atividade de estudo”. Portanto, na atividade de estudo os alunos devem formar conceitos e com eles operar mentalmente, por meio dos instrumentos culturais socialmente disponíveis e domínio de símbolos e que na disciplina desenvolvida e estudada encontram-se na forma de objetos de aprendizagem (LIBÂNEO, 2004, p. 364).

Libâneo (2004) afirma que nada mais oportuno do que o professor aprender sua profissão na perspectiva que vai ensinar aos seus discentes. Dessa maneira, o autor pondera que o correto para entender a base do ensino desenvolvimental é a estrutura psicológica da atividade, com base na qual são criadas as atividades para melhor promover a aprendizagem, e também é importante estabelecer as

características da atividade profissional do professor, constituídas com referência ao currículo.

Davydov, movido por uma inquietação pelo modo de como era ensinando nas escolas, ao longo de quase 25 anos de pesquisa em escola Russa, formulou a teoria do Ensino Desenvolvimental, ou seja, um ensino voltado para o desenvolvimento do pensamento da criança e do jovem. Idealizou uma escola em que o ensino proporcionasse ao discente ter autonomia e poder pensar dialeticamente, de modo que impulsionasse o desenvolvimento mental e senso crítico dos estudantes. Já Vygotsky, em suas pesquisas, fala do desenvolvimento numa perspectiva sociocultural, ou seja, o homem se constitui a partir do meio no qual está inserido, onde se dá a interação entre homem e meio e se estabelecem as relações dialéticas.

Para Davydov (1988), o ensino desenvolvimental facilita o desenvolvimento da mente do aluno, ajudando-o a pensar teoricamente e, conseqüentemente, desenvolvendo a sua personalidade. A função do ensino, neste caso, é estimular nos alunos as capacidades cognitivas necessárias para a assimilação e a utilização com sucesso dos conhecimentos estudados, podendo com autonomia fazer as devidas relações entre as coisas, fenômenos, informações, situações.

Libâneo (2008), fazendo uma análise das objetivações contemporâneas da escola de Vygotsky e da teoria do ensino desenvolvimental de Vasili Davydov, ele reforça que a tarefa da escola contemporânea é ensinar o aluno a pensar teoricamente, a se orientar independentemente na informação científica e em qualquer outro tipo de informação. Ou seja, ele coloca que o ensino mais coerente com o mundo da ciência, da tecnologia, dos meios de comunicação tem as seguintes características:

[...] o conteúdo da atividade de aprendizagem é o conhecimento teórico-científico e os atos mentais que lhe correspondem. Ou seja, a base do ensino desenvolvimental é seu conteúdo, de onde se derivam os métodos de ensino, visando a formação do pensamento teórico-científico. [...] O pensamento teórico se forma pelo domínio dos processos de investigação, dos procedimentos lógicos do pensamento, relacionados com um conteúdo. [...] A melhor metodologia de ensino, em qualquer disciplina, é aquela que ajuda os estudantes, todos os dias e em todas as aulas, a pensar teoricamente, ou seja, cientificamente, com os conteúdos e métodos da ciência ensinada. Compromisso com o conhecimento científico (LIBÂNEO, 2008, p. 17).

Assim, para o ensino desenvolvimental, a apropriação de conhecimentos é uma condição necessária para a atividade prática pensante, ou seja, a nossa

consciência reproduz o movimento das coisas na situação real. Ela capta e reproduz, mentalmente, o movimento da realidade e, para isso, é essencial a atividade prática.

Sob esse viés, o processo de ensino e aprendizagem, na perspectiva do ensino desenvolvimental e fundamentada na teoria Vygotsky, propõe que o aluno se aproprie do conhecimento e se desenvolva. Ademais, dando continuidade à teoria de Vygotsky, a interação é mediada pelos instrumentos, sejam eles objetos concretos ou abstratos. O concreto é o ponto de partida da tarefa que incide na parte inicial; já o desenvolvimento da tarefa requer a identificação dos elementos que constituem a relação abstrata do conceito e como eles se interconectam. Trata-se de um ensino voltado para formação de conceito, não conceito como definição, mas no sentido de uma ferramenta mental. Assim sendo, nesta perspectiva, a função da escola não é só preparar alunos para realizar provas, mas fazer com que eles se apropriem do conhecimento científico e desenvolvam suas potencialidades.

O ensino escolar é o que faz a ligação entre os conceitos cotidianos e os conceitos científicos.

Se nos conceitos espontâneos a criança conhece o objeto representado no conceito, mas não toma consciência do próprio conceito, nos conceitos científicos o início ocorre onde para o conceito espontâneo, ou seja, na explicitação do seu conteúdo, na definição verbal e mediante operações que pressupõe o emprego não espontâneo dele (VYGOTSKY, 1982 apud PERES; FREITAS, 2014, p. 17).

À vista disso, os gestos, a fala e a escrita contribuem para o desenvolvimento do indivíduo, por meio de uma representação simbólica e, conseqüentemente, a aquisição do conhecimento e da cultura.

Para Vygotsky, o conhecimento não é algo pronto, é um sistema estático ao qual o indivíduo se submete, mas com uma espécie de palco de negociação em que seus membros estão num constante movimento de recriação, de reinterpretção de informação, de conceitos e de significados, levando em consideração as aptidões biológicas, tendo influência da cultura, quando “o homem é visto como alguém que se transforma nas relações produzidas em uma determinada cultura” (REGO, 2007, p. 93). Nessa perspectiva, a escola é vista como responsável por ajudar os discentes, no ensino e na aprendizagem no meio em que está inserido, podendo assim perceber suas aptidões.

Ainda à luz de Vygotsky, um bom ensino é aquele que está direcionado ao desenvolvimento das potencialidades dos discentes, quando eles se interagem com o meio e com o outro. O professor é o mediador nas relações entre aluno e o meio, aluno e aluno, sempre num processo de construção e de apropriação do conhecimento.

Sob esse viés, a aprendizagem se dá de forma a destacar as relações entre o geral e o particular, passando pelo processo de autoavaliação do próprio sujeito. A aprendizagem não ocorre espontaneamente, mas sim, por intermédio cultural e a partir de condições biológicas do sujeito. Ao ingressar na escola, a criança ocupa um sistema de relações sociais, agregando mudanças e transformações do próprio sujeito.

Por conseguinte, o aluno que se limita a fazer só o que está proposto no quadro para a realização de uma atividade avaliativa, não entende a essência do que está sendo proposto e, segundo a estatística do Programa Nacional de Avaliação do Aluno (PISA), vem nos mostrando que os alunos têm dificuldades no conhecimento dos conteúdos básicos. Para o ensino desenvolvimental, o aluno tem que conhecer o objeto, vivenciá-lo e interiorizá-lo, para que ocorra a aprendizagem. A teoria de Davydov (1988) propõe o ensino desenvolvimental, defendendo a escola e o ensino dos conhecimentos científicos, éticos, estéticos e técnicos como os principais meios de promoção do desenvolvimento psicológico e sociocultural desde a infância.

Neste contexto, a atividade proposta deve chamar atenção do aluno de modo a despertar conhecimento, como por exemplo com o software GeoGebra que é um programa livre, onde é possível realizar atividades geométricas e algébricas, obtendo resultados satisfatórios, haja vista que ele é interativo e trabalha com apropriação de conceitos. Dessa forma, o professor consegue dar uma aula dinâmica, instigando o aluno a investigar, a experimentar e a formular as suas teses, fazendo com que o aluno possa construir e compreender os conceitos matemáticos desenvolvidos.

De acordo com Moura *et al.* (2010), a prática pedagógica é complexa e composta pelo conteúdo de aprendizagem, pelo aluno, pelo professor e, sobretudo, pelo modo de apropriação da cultura e do desenvolvimento humano. A função do professor, nesse sentido, é mais do que apresentar o conteúdo a ser desenvolvido. É preciso que suas atividades sejam permeadas pela intencionalidade de ensinar.

De acordo com o mesmo autor, o professor deve estar atento para permitir ao aluno, sempre que possível, refletir, repensar e refazer as atividades.

Enquanto mediador, o professor deve questionar, desafiando os discentes a encontrar formas para realizar o que foi proposto. O objetivo da atividade de ensino do professor é desenvolver, no aluno, a aprendizagem, quando a tarefa proposta deve constituir o próprio motivo para sua realização, ou seja, deve provocar, no aluno, a necessidade de resolver problemas e exercícios contidos na atividade. Desse modo, é importante que o aluno tenha o desejo de aprender.

Percebe-se, assim, que o conceito da atividade orientadora é o de um ensino dinâmico. Não é objeto, mas um aprimoramento do conhecimento teórico em que se explica a realidade enquanto um processo de ação e de reflexão, mobilizando uma atividade de aprendizagem.

A situação desencadeadora da aprendizagem deve contemplar a gênese do conceito, ou seja, na sua essência, ela deve explicitar a necessidade de que se teve para chegar à construção de tal conceito, por meio de abstrações autênticas, caracterizadas pelo pensamento teórico e captando a essência do objeto. Fundamentando-se na concepção materialista dialética do ser humano, Vygotsky foi o iniciador da teoria histórico-cultural, acreditando que o fator social é quem estabelece e garante o conhecimento. Para Vygotsky o conhecimento se dá na relação e na apropriação da cultura e mediante a comunicação com outra pessoa. A relação homem e mundo não é direta, e sim mediada por certas ferramentas da atividade humana. O desenvolvimento humano não é dado, a priori, pois a cultura é parte constitutiva da natureza humana, dada a partir da relação do indivíduo e do seu contexto social e cultural.

Assim sendo, a escola torna-se um espaço de aprendizagem e de apropriação do conhecimento, com ferramentas simbólicas para o seu desenvolvimento. Nesse sentido, a atividade orientadora do ensino propõe a teoria histórico-cultural, possibilitando realizar uma atividade educativa, tendo como base a construção do saber, momento em que o indivíduo se apropria do conceito, a partir das suas experiências vividas na cultura. Assim:

Toda atividade mental é uma representação, mediatizada pela linguagem na comunicação e interação com os outros, dos objetos da realidade que constituem a cultura, tal atividade, que para Vygotsky é o conjunto dos processos psicológicos superiores que tem sua origem nas relações sociais do indivíduo, em seu contexto social e cultural (DAVYDOV, 1988).

Desse modo, ao ingressar na escola, o estudante ocupa um novo lugar nas relações sociais, onde ele tem apropriação teórica da realidade, permitindo-lhe que se aproprie dos conceitos historicamente construídos, pois ao nascer ele já está inserido em um processo histórico-cultural. Davydov foca a importância da relação entre o modo de o professor organizar e desenvolver o ensino, tendo em vista o aluno. Além do mais, ser humano ao reproduzir todas as habilidades que estão intactas no objeto, conhece as suas aptidões e passa a desenvolvê-las. Enquanto isso, os animais, quando nascem já trazem consigo suas aptidões e na vida adulta vão desenvolvendo-as.

A teoria do ensino desenvolvimental pressupõe conhecimento materialista histórico dialético, em que evidencia a relação entre o sujeito humano social e a realidade extrema. Conforme Davydov (1988, p. 7), o indivíduo, ao apropriar-se dos conhecimentos socialmente construídos, “reproduz em si mesmo as formas históricas sociais das atividades” aprendidas.

De fato, o que Davydov propõe o desenvolvimento humano e que justifica o termo desenvolvimental é que durante a evolução da atividade teórico – prática as abstrações se processem em um grau de complexidade acerca do objeto da atividade, atingindo diferentes estágios de concretude sobre o mesmo.

Davydov (1988) buscou responder aos seguintes questionamentos referentes às questões didáticas do professor: Como analisar e organizar o conhecimento a ser trabalhado com os alunos? Como estes conhecimentos são mais propícios a isso com base nos motivos dos alunos? Como é que o docente administra a aula e como é que ele organiza as situações pedagógicas?

Ademais, para Davydov (1988), os problemas das escolas são decorrentes das suas práticas pedagógicas. Para resolução desse problema, precisa melhorar os métodos de se trabalhar com as crianças, de modo a influenciá-las no desenvolvimento de suas capacidades, viabilizando condições de superar possíveis deficiências no desenvolvimento das suas funções mentais. Nesse contexto, Davydov faz uma comparação entre Piaget e Vygotsky sobre a influência do ensino e da educação no desenvolvimento mental das crianças.

Na teoria de Piaget, a educação e o ensino são considerados como condições para a adaptação do processo pedagógico ao desenvolvimento mental da criança. Vygotsky observou, ironicamente, que este tipo de educação e de ensino “vai” atrás

do desenvolvimento da criança, orientando-a para o dia de amanhã, mais do que para o de ontem (NT: ensino estruturado sobre o desenvolvimento) (VYGOTSKY, 1984, p. 26).

Segundo Davydov, o ensino desenvolvimental facilita o desenvolvimento do aluno e sua função é estimular a capacidade cognitiva do aluno, quando ele, nesse processo, vai adquirindo autonomia e apropriação do conhecimento, condições necessárias para a atividade da prática pensante. Dessa maneira, a mente capta e reproduz movimentos da realidade, tornando-se essencial nas atividades práticas. Esta reprodução das capacidades das atividades, com os instrumentos e o conhecimento, pressupõe o que se deve realizar em relação a elas, através de uma atividade prática humana.

Portanto, a atividade de ensino tem a perspectiva desenvolvimental de dar condições ao aluno para que ele internalize, mentalmente, e incorpore no seu fazer, os conceitos necessários, assim, adquirindo saberes fundamentais para discernir as situações e tomar as decisões mais acertadas frente às situações concretas. Nesse âmbito, é indispensável dar condições necessárias aos alunos para que possam tomar decisões de forma autônoma, em qualquer situação contextual de sua vida.

Frente a realidade educacional brasileira e à dinamicidade das teorias de Vygotsky e Davydov, um aspecto fundamental que garantirá a aplicabilidade e resultados significativos e satisfatórios, é a formação de professores para que possam ir além do ministrar conhecimentos básicos, chegando ao conhecimento integral e atualizado, tendo em vista um ensino aprendizagem de qualidade.

Logo, a Proposta de Davydov (1988), por meio da sua teoria, requer metodologia ativa e uma nova forma dos docentes estabelecerem um ensino-aprendizagem que vise o desenvolver do pensamento teórico para que haja desenvolvimento escolar. A não compreensão, por parte do docente, em relação à formação e ao conceito do pensamento teórico, pode provocar uma ruptura no processo de ensino-aprendizagem científica, caso ele não consiga organizar atividades especiais e funcionais, que quando aplicadas, expressem uma relação ativa entre seus usuários, possibilitando-lhes o desenvolvimento de maior conhecimento e habilidades.

Nessa perspectiva, é necessário provocar a curiosidade no discente, ou seja, mediar a interação entre discente e objeto de estudo, motivando, ao máximo, a exploração de conhecimentos, da manipulação e dos resultados possíveis. A função

do professor não é dar respostas prontas, mas apontar caminhos, instigar, motivar e dar condições para que juntos, cheguem à essência do objeto, porque ambos estão em processo de aprendizagem. Essa postura revela a exigência de uma formação docente dinâmica, atualizada e contextualizada, pois ela nunca está pronta e acabada.

Assim, o docente precisa dominar a investigação do objeto a ser estudado, dentro da lógica epistemológica e da didática do conteúdo, tornando possível alcançar o núcleo do objeto, porque aí se dá a aprendizagem, o conhecimento. Ao tomar como exemplo, o aprender o conceito de número, precisa-se perceber como o todo é expressivo nas relações de quantidade e dar condições para se pensar nas particularidades do número e em relação às particularidades relacionadas à quantidade. Davydov recorre a Espinosa para explicar tal relação.

Spinoza viu a essência do círculo no ato de sua origem, de sua construção ('criação'). A definição do círculo deve expressar a causa da origem da coisa dada, o método de sua construção. 'O círculo, segundo esta regra - escreve Spinoza - deve ser definido - se assim for: é a figura escrita por qualquer linha, uma de cujas extremidades é fixa e a outro móvel'. Aqui está o método para obter círculos infinitamente diversos. Como bem indica y. borodái, neste caso 'Spinoza nada mais fez do que descobrir o procedimento de construção e ação de um instrumento de trabalho extremamente simples, o compasso', ou seja, na forma do conceito de círculo, a idealização literal de o esquema de atividade com um instrumento simples, a atividade de construir o objeto em suas características essenciais universais (DAVYDOV, 1988, p. 128).

Portanto, o professor para ensinar a essência do objeto de conhecimento, é preciso primeiro estruturar a atividade, para que o aluno, ao ser contatado com o objeto, aprenda o conceito teórico, generalize e analise os diversos objetos. Cabe ao professor organizar o processo de tal forma que, junto aos alunos, possa desenvolver ações mentais sobre os conceitos e aplicá-los em seu cotidiano. Segundo Longarezzi e Franco (2013), o envolvimento de dois professores com ações concretas como planejar, avaliar, ensinar, motivar, entre outras, podem ser atividades de aprendizagem significativas no processo, na medida em que são problematizadas, confrontadas e reorganizadas teórica e metodologicamente.

Segundo a teoria de Vygotsky, o professor tem um papel fundamental no processo do ensino-aprendizagem: superar a forma tradicional de educar, deixando de exercer a função de injetar conhecimento nos alunos como se eles fossem recipientes vazios a serem complementados pelo professor. Não é possível

continuar a pensar, planejar e avaliar o processo educativo sozinho, independentemente da realidade dos alunos e do contexto socioeducativo em que estão inseridos. É preciso compreender que na perspectiva dialética, proposta por Vygotsky, o professor não é o proprietário, mas o organizador, ou o administrador do ambiente educacional, ou o facilitador das relações sociais que ocorrem no espaço educacional, possibilitando ou desenvolvendo o aprendizado. De qualidade. O professor precisa ter bases científicas, didáticas pedagógicas contextualizadas e exercer o papel de mediador, fazendo uso da mediação técnica e a mediação simbólica.

Portanto, na perspectiva de Vygotsky, o professor não é um objeto ou uma ferramenta a ser manipulada por um aluno, mas um ser humano consciente, ativo, um intelectual que tem conhecimento, sabe despertar ou motivar seus alunos e direcioná-los, coletivamente num processo educacional de qualidade. Fica claro que a relação indivíduo sociedade é fruto de uma interação dialética de seu meio cultural, seja, o meio ou o modifica.

Assim, segundo Vygotsky (1984 apud REGO, 2007), o conhecimento não é algo pré-fabricado, e nem um sistema estático no qual o indivíduo está imerso, mas, algo dinâmico, como uma espécie de cenário de negociação, não no quais seus membros se encontram em constante estado de recreação, exercício, reinterpretação de informações, conceitos e significados, levando em consideração as capacidades biológicas, influenciadas pela cultura. Assim, “o homem é visto como alguém que se transforma, nas relações que existem, numa determinada cultura” (REGO, 2007, p. 93). Nessa perspectiva, a escola é vista como responsável por ajudar os alunos, não por ensinar e aprender, não por aqueles em que estão inseridos, além de poder perceber suas aptidões e habilidades.

Contudo, à luz de Vygotsky, um bom professor é aquele que pretende desenvolver o potencial de seus alunos, quando estes terão papel fundamental na interação entre eles. O professor é o mediador na relação do aluno com o ambiente, aluno e aluno, e não no processo de construção e apropriação do conhecimento.

Nesse contexto, a teoria de Davydov (1988) propõe um ensino desenvolvimentista que defende a escola e o ensino, fundamentados no conhecimento científico, ético, estético e técnico como os principais meios para promover o desenvolvimento psicológico e sociocultural desde a infância.

Assim, assume-se que a atividade deve ser pensada com base em uma metodologia que chame a atenção do aluno, utilizar recursos tecnológicos para facilitar e despertar conhecimento, sensibilidade e gosto pelo aprendizado. Uma proposta é a utilização do software GeoGebra, um programa gratuito, com o qual é possível realizar atividades geométricas e algébricas, com resultados satisfatórios, pois é interativo e trabalha com apropriação de conceitos. Dessa forma, o professor consegue ministrar uma aula dinâmica, estimulando o aluno a investigar, a experimentar e a formular sua tese, como construir e compreender os conceitos matemáticos desenvolvidos.

Isso justifica a importância de deixar claro que a formação continuada contribui para o enriquecimento de conceitos teóricos e desenvolvimento cognitivo, dentro das perspectivas da teoria do desenvolvimento, fundamentada, teoricamente, no materialismo histórico dialético na abordagem histórico-cultural.

Portanto, conclui-se que uma formação sólida, contínua e metodologicamente ativa contribui muito para o desenvolvimento da sociedade e de uma educação baseada em significados reais.

Diante disso, na teoria histórico-cultural, o conhecimento não é considerado algo pronto, mas algo que vai sendo construído ao longo da história, no conhecimento vivo. Para que a apropriação significativa do conceito matemático ocorra, segundo essa abordagem, é necessária uma “metodologia com ênfase nos aspectos qualitativos em detrimento dos quantitativos, preocupada em ir além da simples descrição da realidade estudada” (DAMAZIO, 2000, p. 4).

Vygotsky, citado por Moura (2010), considera que a apropriação do conhecimento se dá por meio da interação social e mostra que as relações, entre os sujeitos, começam desde o nascimento, em um determinado meio social, que se torna a principal influência para o desenvolvimento de seu intelecto, demarcando sua vida. Dessa forma, o conhecimento é produzido por meio da apropriação da cultura e da mediação da comunicação.

A atividade precede o desenvolvimento do método, que vai do geral ao particular e deve atingir o cerne do objeto. O conceito deve ser apropriado e então aplicado, passando do abstrato (o conceito internalizado pela comunicação compartilhada na escola) para o concreto (a percepção, relação e aplicação dos conceitos com a vida). Dessa forma, a aprendizagem dos conteúdos deve passar do geral para o particular, quando os alunos aprendem e internalizam no plano social

compartilhado, o conceito que compõe o conteúdo e só então lidam com esses conceitos, em situações individuais e particulares, passando pelo processo de autoavaliação.

Cabe destacar que a aprendizagem não ocorre de forma espontânea, mas a partir das condições biológicas do sujeito que ocorrem por meio da mediação cultural. Freitas (2011), citando Vygotsky, relata que ao ingressar na escola, a criança ocupa um espaço no sistema de relações sociais, agregando mudanças e transformações ao próprio sujeito. As ações de estudo permitem ao aluno individualizar as relações gerais. Cabe a ele conhecer o objeto, experimentar e internalizar o aprendido. A atividade deve ser elaborada com uma metodologia que chame a atenção do aluno, pois é ministrada com o software GeoGebra.

Conforme discutido, a teoria de Davydov propõe a organização do ensino, de modo que o aluno desenvolva suas capacidades mentais por meio da apropriação do conhecimento. Na perspectiva do ensino desenvolvimentista, é importante que o aluno se aproprie do conceito, que a atividade atinja o cerne do objeto de estudo e que ele tenha autonomia durante o processo de aprendizagem.

Portanto, considerando que a educação hoje está mais voltada para a experimentação, a teoria histórico-cultural vem mostrar e garantir que o desenvolvimento do indivíduo ocorra a partir das relações com o meio. A sala de aula é um lugar onde o aluno já contribui com conhecimento e o papel da escola é desenvolver suas habilidades.

Nesse contexto, o software GeoGebra é uma alternativa para promover a compreensão do conceito, para a autonomia do aluno e para o desenvolvimento de atividades investigativas, a fim de alcançar a essência do objeto, para que possa pensar teoricamente, sobre o mundo que o cerca, por ter internalizado o conceito.

Nessa perspectiva, podemos citar o trabalho de Vaz (2012) que apresenta uma proposta inspirada nas teorias de Vygotsky e de Davydov histórico-cultural para uma ação baseada na experimentação, conjectura, formalização e generalização do conhecimento matemático. As atividades matemáticas planejadas nas aulas e nos projetos de pesquisa foram destinadas ao trabalho com o GeoGebra. Assim, trabalhando com tecnologia, em sala de aula, e alcançando o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos, por meio da pesquisa e apropriação da essência do objeto, a atividade apresentada pelo professor precisa ser bem estruturada, e o professor, comprometido.

Além disso, a escola é constituída pela mediação cultural e pela pedagogia, como prática cultural intencional de produção e internalização de sentido, promovendo o desenvolvimento cognitivo, afetivo e moral dos indivíduos. A escola, em seu interior, promove a cultura e a interiorização dos meios cognitivos de compreensão e de transformação do mundo.

Portanto, percebe-se que os pontos básicos do princípio vygotskiano confirmam que a aprendizagem é uma articulação de processos externos e internos, ou seja, aponta para a internalização de signos culturais pelo indivíduo, o que gera uma qualidade autorreguladora das ações e do comportamento dos indivíduos.

Como escreve Libâneo (2004, p. 10):

Mas não se trata de 'aprender fazendo'. Se for enfatizado apenas o caráter específico da experiência de criar dois filhos, pouco será alcançado em termos de desenvolvimento mental. Na expressão de Lipman (1997), como as crianças são conceitualmente desnutridas. Segundo Davydov, 'o conhecimento empírico (conceitos) corresponde ao conhecimento empírico (ou formais) e ao conhecimento teórico (conceitos), conhecimento teórico (ou substância)', seja, se o ensino alimenta a criança apenas como conhecimento empírico, ela só poderá realizar ações empíricas, sem influenciar substancialmente o desenvolvimento intelectual de dois alunos.

Logo, para que as situações de aprendizagem se desenvolvam é preciso que se faça a análise lógica do conteúdo e da atividade em relação aos conteúdos, considerando, sobremaneira, os motivos.

Deve-se destacar, entretanto, que para Davydov (1988), existe um outro aspecto bastante importante: o desejo.

O termo desejo reproduz a verdadeira essência da questão: as emoções são inseparáveis de uma necessidade. Enquanto se discute uma certa emoção podemos sempre identificar a necessidade que se baseia na emoção. E quando estamos discutindo um tipo de necessidade, temos que definir as emoções que dela se originam, para especificarmos o que foi citado acima (DAVYDOV, 1988, p. 4).

Além disso, há o realce da atividade sócio-histórica e coletiva dos indivíduos na formação das funções mentais superiores, ou seja, o caráter de mediação cultural do processo de conhecimento, ao mesmo tempo em que, a atividade individual de aprendizagem, pela qual o indivíduo se apropria da experiência sociocultural como um ser ativo e atuante no meio em que está inserido. Isso leva a refletir como o ensino pode impulsionar o desenvolvimento das competências cognitivas mediante a

formação de conceitos e desenvolvimento do pensamento teórico e por quais meios os discentes podem potencializar sua aprendizagem, utilizando uma didática voltada para a formação de sujeitos pensantes e críticos.

O conhecimento contemporâneo pressupõe que o homem domine o processo de origem e desenvolvimento das coisas através do pensamento teórico, que estuda e descreve a lógica dialética. O pensamento teórico tem seus tipos específicos de generalização e abstração, seus procedimentos para formar conceitos e operar com eles. Dessa forma, a formação de tais conceitos abre caminho para que os alunos dominem os fundamentos da cultura teórica vigente. [...] A escola, em nossa opinião, deveria ensinar as crianças a pensar teoricamente (GOLDE, 2002, p. 49).

Nessa perspectiva, estão sendo realizadas estratégias de pesquisa para que o aluno aprenda a internalizar os conceitos e habilidades do pensamento e seja capaz de agir em seu meio.

Portanto, o ser humano se desenvolve histórica, cultural e socialmente, pois a aprendizagem ocorre por meio de processos de comunicação (que também são educativos) que se estabelecem com os outros e com as realidades. Para tantas pessoas, eles têm uma identidade cultural, construída ao longo da vida, que funciona como um filtro para a produção.

1.2 O PAPEL DOCENTE NO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Segundo Moura (2010), a prática pedagógica é complexa e composta por conteúdos de aprendizagem, quando aluno e professor interagem e, sobretudo, criam juntos uma forma de apropriação da cultura e do desenvolvimento humano. O papel do professor, nesse sentido, é maior do que o de apresentar o conteúdo a ser desenvolvido, pois exige que suas atividades sejam permeadas pela intenção de ensinar. Segundo o mesmo autor, o professor deve estar atento para permitir ao aluno, sempre que possível, refletir, repensar e refazer as atividades.

Como mediador, o professor deve questionar, desafiando os alunos a encontrar formas de alcançar o que se propõe. O objetivo da atividade docente do professor é desenvolver, no aluno, a aprendizagem. Essa tarefa proposta deve constituir o próprio motivo de sua realização, ou seja, deve provocar no aluno a

necessidade de resolver os problemas e exercícios contidos na atividade, e para isso é importante que o aluno tenha vontade de aprender.

O conceito de atividade de tutoria é o de ensino dinâmico. Não é um objeto, mas um refinamento do conhecimento teórico no qual a realidade é explicada, como um processo de ação e reflexão, mobilizando uma atividade de aprendizagem.

Para Davydov, o ensino do desenvolvimento facilita o desenvolvimento dos alunos. Sua função é estimular as habilidades cognitivas do aluno, adquirir autonomia, apropriação do conhecimento como condição necessária para a atividade da prática do pensamento. A mente capta e reproduz os movimentos da realidade, e com ela surgem as atividades práticas essenciais. Essa reprodução da capacidade das atividades, com os instrumentos e o conhecimento, pressupõe e deve realizar uma atividade prática e humana, incorporada às capacidades cognitivas.

Vygotsky acredita que o desenvolvimento cognitivo do aluno ocorre por meio das relações sociais, ou seja, por meio de sua interação com outros indivíduos, com o ambiente e com o professor, que é uma figura essencial do conhecimento, pois representa um elo intermediário entre o aluno e o conhecimento disponíveis no ambiente. Para ele, ter educadores que valorizem a escola, a ação e a intervenção pedagógica é ter um mediador que orienta a aprendizagem no processo de construção do conhecimento.

Assim, os alunos serão autônomos, observando as competências que já possuem e as que podem adquirir, estimulando o Nível de Desenvolvimento Potencial, e assim criando cada vez uma nova ZDP. Segundo Vygotsky (1991, p. 243) é importante que os alunos tenham um ambiente colaborativo, para trocar ideias e trabalhar em grupo, a fim de construir seu próprio conhecimento, a partir da interação com seus pares. O diálogo contextualizado entre professor e aluno também é de fundamental importância nesse processo.

Além disso, os alunos esperam que o professor estruture suas atividades de estudo de forma que elas façam sentido para eles. Em outras palavras, que tais atividades sejam consideradas possíveis para o desenvolvimento do pensamento científico, que, por sua vez, são necessárias para o seu desenvolvimento.

Percebe-se, então, que a aprendizagem leva o aluno ao desenvolvimento, passando pela atividade de estudo, quando a capacidade de pensar, argumentar e resolver problemas é desenvolvida através dos conteúdos.

Assim, é uma situação que desencadeia o estudo, quando uma atividade prática pensada e organizada pelo professor faz com que os alunos procurem novas formas e meios para resolver um problema e, desta forma, desenvolvam operações mentais. Nesse contexto, o professor instiga os alunos e juntos a eles constroem os conceitos propostos pela atividade de estudo. Desse modo, nesse processo, o aluno cria categorias de pensamento e de abstrações sobre o que é apresentado.

O centro da atividade de estudo é a tarefa de estudo, cujo objetivo e finalidade é propor desafios aos alunos para que façam transformações mentais com os conteúdos, produzindo mudanças qualitativas nas formas de pensar e de agir dos alunos, promovendo mudanças neles, por eles mesmos.

A tarefa de estudo deve compor um problema, um desafio, um caso, uma boa pergunta, ou seja, o conteúdo só faz sentido quando promove uma capacidade humana que transforma a forma como os alunos orientam seu próprio comportamento. A atividade de estudo do aluno, proposta por Davydov (1988), é dominar os princípios teóricos do objeto que se encontram em sua gênese, dominar os modos generalizantes de ação e ser capaz de realizá-los. Assim, como o lugar ocupado pelo aluno é semelhante ao do pesquisador, a atitude de pesquisa o transforma em alguém interessado em realizar, pesquisar e, conseqüentemente, fazer descobertas. O aluno não investiga realmente, mas se apropria das ações mentais investigativas utilizadas na investigação do objeto e as cria para si mesmo.

Sob esse prisma, a atividade docente, na perspectiva do desenvolvimento oferece condições para que o aluno internalize mentalmente e incorpore, em sua prática, os conceitos necessários, adquirindo os conhecimentos necessários para discernir situações e tomar decisões mais precisas e concretas, de forma autônoma, em qualquer situação campo de sua vida. Nesse sentido, é necessário conhecer a realidade em que se vive, pois somente assim podem ser estabelecidas inter-relações entre acontecimentos, fatos sociais e midiáticos e, nesse sentido, é possível mediar a relação dos alunos com o conteúdo da mídia em sala de aula.

A aprendizagem leva ao desenvolvimento por meio da atividade, considerando os fatores externos ao desenvolvimento, com destaque especial para a incorporação da cultura vista em sua formação histórica.

Contudo, o papel da educação escolar no mundo contemporâneo está na composição do conhecimento e no desenvolvimento de habilidades mentais quando

os alunos incluem o conhecimento teórico, junto ao desenvolvimento de habilidades cognitivas complexas.

1.3 A TEORIA DA ATIVIDADE E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A matemática se apresenta em um aspecto bastante peculiar quando se trata da sala de aula, devido a sua natureza, predominantemente abstrata, de modo que se caracteriza pela influência do formalismo com que o conteúdo matemático é apresentado, independentemente de sua inserção no contexto social. Nesse sentido, a falta de compreensão do conteúdo matemático, atrelada à dificuldade em interpretar as questões propostas no livro didático, pode gerar ao professor, uma limitação no ensino da matemática no que diz respeito a sua prática pedagógica em sala de aula.

A teoria da atividade desenvolvida por Leontiev sustenta que o homem se desenvolve a partir do meio em que está inserido e, assim, o desenvolvimento das funções psíquicas passa por um processo de apropriação de alguns conhecimentos e, assim, transformando a atividade externa em interna. No ambiente escolar, está diretamente ligada à ideia de que há uma razão para aprender, ou seja, a razão impulsiona a ação do aluno.

No campo da matemática, um dos maiores problemas é a falta de compreensão da finalidade de determinada atividade, ou seja, não basta apresentar o conteúdo; é preciso propor uma atividade específica que possibilite e potencialize a internalização de conceitos.

Segundo Leontiev (1978), podemos definir a atividade como o processo, produtor do meio ambiente e mediado pela reflexão psíquica da realidade, ou seja, responsável por especificar as relações objetivas/subjetivas do homem com o mundo e, assim, promover seu desenvolvimento integral. Nas palavras do autor:

O reflexo da realidade surge e se desenvolve no processo de desenvolvimento dos vínculos reais dos homens conscientes com o mundo humano que os cerca, [...] e, por sua vez, exerce influência inversa em seu desenvolvimento (LEONTIEV, 1978, p. 20).

Leontiev (1978) explica que a reflexão subjetiva da realidade surge e se desenvolve a partir das relações estabelecidas entre o homem e o mundo concreto. Assim sendo, o desenvolvimento depende das relações que traça e das condições

reais de vida que desenvolveram uma espécie de atividade principal que orienta cada etapa do desenvolvimento psíquico. Leontiev define a atividade principal da seguinte forma:

1. É a atividade em cuja forma surgem outros tipos de atividade e dentro da qual eles diferem. [...]
2. A atividade principal é aquela em que certos processos psíquicos são especificados ou organizados. [...]
3. A atividade principal é a atividade da qual dependem intimamente as principais mudanças psicológicas na personalidade da criança, observadas em um determinado período de desenvolvimento (LEONTIEV, 2004, p. 64).

Nesse sentido, a estrutura interna da atividade é pautada por ações e operações, derivadas de seus objetivos e motivo. A ação é um processo direcionado a um objetivo, mas não significa que coincida com o motivo presente na atividade, ou seja, o indivíduo que a mobiliza sempre que há necessidade e o objeto da ação está relacionado ao motivo sem combinar.

A teoria da atividade pode fornecer subsídios teóricos e subsídios para fundamentar a prática do professor no campo da matemática, partindo do pressuposto de que para aprender a relação do aluno com a aprendizagem deve ser intencional, tendo a escola um papel central. Essa teoria é concebida em três pontos de relevância: ela ocorre em um ambiente social, por meio de uma atividade, medida nas relações entre os sujeitos e entre o sujeito e o objeto de aprendizagem. Veja abaixo:

Na sala de aula de matemática, como as crianças fazem matemática para acertar, tirar boas notas, agradar o professor, passar de ano. No dia a dia, fazemos a mesma coisa para pagar contas, dar troco, para clientes cujo preço é razoável. [...] Que explicação existe para alguém conseguir resolver um problema em uma situação e não em outra? (NUNES; CARRAHER; SCHLEIMANN, 2011, p. 35).

Percebe-se que as crianças, não, por exemplo, acima, se movimentam no cotidiano por motivos que fazem sentido na escola devido aos incentivos estimuladores. Nesse sentido, que mostra como os alunos vão à escola por motivos errados, ou seja, pela falta de sentido não contido apresentado.

Portanto, faz sentido que os alunos estabeleçam, junto ao professor, o modelo de atividade que realizarão, de forma a atingir os conceitos ligados ao conteúdo.

CAPÍTULO 2 – ASPECTOS SIGNIFICATIVOS NO USO DAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo aborda aspectos do uso da tecnologia em sala de aula, destacando o GeoGebra como ferramenta de apoio no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Traz um quadro de três trabalhos selecionados que estabelecem relações com o objeto de estudo desta dissertação. O objetivo de apresentar trabalhos já desenvolvidos foi o mostrar aos futuros leitores do nosso trabalho que a ideia aqui apresentada foi pensada e desenvolvida por outros pesquisadores, porém, sob perspectivas diferentes. Cada trabalho acadêmico é único, pois se configura e se estabelece a partir da visão de mundo e da trajetória de leitura do pesquisador. Trazemos aqui, aspectos significativos das tecnologias usadas em sala de aula, como o GeoGebra, ferramenta pedagógica funcional e prática, e, um recorte de estudos desenvolvidos.

2.1 AS TECNOLOGIAS NA SALA DE AULA

Com a evolução das tecnologias, ao longo do tempo, a forma como estão sendo utilizadas no aprendizado dos alunos mudou. O uso de tecnologias em sala de aula, no ensino de matemática, pode promover mudanças na dinâmica e na forma de aprender e ensinar conteúdos, ou seja, pode enriquecer a aprendizagem e promover a aquisição de novos conhecimentos e habilidades.

Assim, os espaços educativos passam por mudanças para se adequarem à nova realidade, pois com a chegada da Internet, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) tornaram o conhecimento mais acessível.

Moran (2016, p. 6) disse que:

A Internet é uma tecnologia que facilita a motivação dos alunos pela novidade e pelas inesgotáveis possibilidades de pesquisa que ela oferece. Essa motivação aumenta se o professor proporcionar um clima de confiança, abertura, cordialidade com os alunos. Mais do que a tecnologia, o que facilita o processo de ensino-aprendizagem é a capacidade do professor de se comunicar de forma autêntica, estabelecendo relações de confiança com seus alunos por meio do equilíbrio, competência e simpatia com que atua. Assim, o aluno desenvolve a aprendizagem cooperativa, a pesquisa em grupo, a troca de resultados.

Nesse contexto, pode-se dizer que o computador é uma ferramenta tecnológica que possibilita momentos de interação, possibilitando a construção de conhecimento mútuo e a utilização de diferentes meios de aprendizagem pelo aluno. Assim, uma vez que as ferramentas tecnológicas permitem que o potencial emerja, elas podem interagir, movimentar e investigar. Como a escola já não é mais detentora dos saberes, os professores não são mais só transmissores de saber, sabe-se que espaços educacionais sofrem mudanças para se adaptarem à nova realidade, a partir do uso da tecnologia no ensino e na aprendizagem, no interior da escola.

A sociedade atual vive um momento em que a tecnologia é essencial e está a serviço da qualificação das pessoas e da funcionalidade dos serviços em diversas áreas, visando melhores resultados e maior qualidade de vida. Nesta perspectiva, a educação não pode ficar aquém e, sobretudo, na área da matemática, este recurso se torna indispensável, pois implica raciocínio e prática. Portanto, alunos e professores precisam de treinamento para obter bons resultados.

Nesse sentido, o uso das tecnologias em sala de aula, como ferramentas pedagógicas, implica aspectos essenciais como repensar os métodos e propósitos de aprender matemática, mudar o papel do professor e o papel do aluno, a natureza das atividades a serem realizadas e a gestão do ambiente da sala de aula (AMADO, 2007). Isso requer estrutura física e humana para que, além de um ambiente adequado e profissionais qualificados, o ensino-aprendizagem seja satisfatório, contextualizado e funcional.

Segundo Amado (2007), o uso das tecnologias como recurso pedagógico tem grande potencial para estimular alunos e professores a realizar pesquisas, investigar, criar propostas e soluções matemáticas, visando um conhecimento matemático racional, lúdico, funcional e que garanta bons resultados. Pierce e Stacey (2001), consideram que a introdução de tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática pode ocorrer em dois níveis: funcional e pedagógico. Do ponto de vista funcional, o uso desta tecnologia está confinado ao professor, com os alunos desempenhando o papel de meros espectadores. Nesse sentido, a tecnologia está presente quando o professor faz uma demonstração de figuras planas de um PowerPoint ou uma apresentação evolutiva no GeoGebra, permitindo ao aluno a oportunidade de interagir, participar ou experimentar. Por outro lado, do ponto de vista pedagógico, o uso dessa tecnologia é aquele que ocorre em um contexto

educacional onde o professor e os alunos interagem diretamente com as ferramentas tecnológicas. Nesse contexto, o aluno tem a oportunidade de experimentar, ensaiar, investigar e resolver sua atividade com recursos tecnológicos.

Aqui queremos apresentar a tecnologia como ferramenta pedagógica e Kokol-Voljc (2003) nos apresenta algumas características que nos ajudam a compreendê-la como ferramenta pedagógica. Tal conceito de ferramenta pedagógica é indissociável do uso que lhe é dado, nesse sentido qual recurso tecnológico é fato de seu uso, podem ser verificados pontos cruciais como o assunto, o objetivo e se é oportuno. Cabe ao professor escolher a ferramenta e o método que melhor se adequa à apresentação e investigação daquele conteúdo. É ele também (Cabe ao professor) que vai avaliar o valor e a relevância da ferramenta pedagógica escolhida. Por fim, é o professor quem transforma (ou não) a tecnologia em ferramenta pedagógica para que o aluno possa interagir e investigar os conteúdos apresentados em um sólido processo de ensino-aprendizagem.

Os professores podem desenvolver uma relação de parceria com as tecnologias, pois essa ferramenta pedagógica é capaz de promover o aprendizado e, portanto, permitir que os alunos resolvam problemas e os treinem para investigar e levantar conjecturas. Neste sentido, as tarefas devem ser desenhadas e ajustadas aos propósitos de aprendizagem. É aqui que a grande questão reside na natureza das tarefas e na forma como são apresentadas aos alunos.

Portanto, as atividades devem permitir que o aluno ensaie, investigue e tire conclusões. Portanto, o uso das tecnologias em sala de aula passou a dar aos alunos maior destaque em relação ao seu próprio aprendizado, ao invés de um papel passivo de ouvinte atento ao conhecimento do professor.

No entanto, o grande desafio do momento é ajudar os professores a desenvolverem os conhecimentos práticos necessários para ensinar, o que inclui a aquisição de técnicas e de competências a aplicar, no terreno, com os alunos, exigindo profissionalismo e conhecimento das diferentes disciplinas para trabalhar, como compreender os contextos, os recursos e as culturas de ensino, para que se adaptem melhor à realidade dos alunos.

Outrossim, com o desenvolvimento, o crescimento e o avanço tecnológico, faz-se necessária uma preparação maior e mais abrangente do professor no que diz respeito à inserção das tecnologias nas práticas pedagógicas em sala de aula. Com isso, é necessária a qualificação dos professores, pois cabe a eles dominar os

conteúdos curriculares e as tecnologias para estabelecer diferenças qualitativas nas práticas pedagógicas. Dessa maneira, a integração das atividades pedagógicas e dos recursos tecnológicos leva o aluno à autonomia e à reflexão, dada a dinâmica de aprendizagem.

Todavia, o uso da tecnologia em sala de aula exige muito mais do que a aquisição de recursos tecnológicos, pois apenas colocar tais recursos em sala de aula não gera aprendizado, pois seu uso será dentro de uma perspectiva meramente funcional (PIERCE; STACEY, 2001); uma vez que foi usado e confinado ao uso feito pelo mestre. Dito isso, confirma-se que os recursos tecnológicos podem potencializar muito o ensino, mas depende de como estão sendo utilizados dentro da escola, ou seja, se o professor tem o poder de transformá-los em meios ricos ou pobres de aprendizagem. Para isso temos um enorme desafio que é a formação inicial e continuada dos professores.

Sob esse viés, vê-se que a evolução tecnológica mudou o mundo em que vivemos e com isso, o público nas escolas também mudou. Hoje, usar a tecnologia como ferramenta pedagógica, segundo Amado (2007), implica aspectos fundamentais como repensar os métodos e propósitos de aprender matemática, mudando o papel do professor e o papel do aluno.

Nesse contexto, trabalhar com a tecnologia, como recurso pedagógico, na aula de matemática, é capacitar o aluno a realizar pesquisas, é permitir que ele experimente e mova o objeto de estudo, o que exige do professor, o compromisso de assumir, naturalmente, que nem sempre será capaz de responder a todas as perguntas. Dito isso, argumenta-se que o aluno não pode ser um mero espectador, deixando ao professor, o papel de protagonista, no uso da tecnologia, dentro de uma perspectiva funcional. Percebe-se, portanto, que na interação entre professor e aluno, no uso da tecnologia, há uma perspectiva pedagógica mais ampla, na medida em que produz conhecimento.

Desse modo, quando a tecnologia está presente na sala de aula de matemática, ela permite ao aluno e ao professor ampliar seu campo de experiência e, nesse ambiente, desenvolver conjecturas, testá-las, eventualmente refutá-las e comunicar suas conclusões.

Nesse sentido, a educação é um mecanismo que articula as relações entre poder, conhecimento e tecnologias. O ser humano é educado em um ambiente cultural familiar particular, onde adquire conhecimentos, hábitos, atitudes,

habilidades e valores que definem sua identidade social. Além disso, a escola exerce seu poder em relação ao conhecimento e ao uso das tecnologias, mediando entre professores, alunos e o conteúdo a ser estudado. A escola representa um espaço de formação, de educação escolar e de garantia de formação que lhes permite dominar conhecimentos e melhorar a sua qualidade de vida.

Além disso, é possível notar a importância da formação e da mediação docente nesse novo contexto, que exige maior dedicação e mediação mais efetiva no processo de aprendizagem. A ação do professor na sala de aula, como o uso de suportes tecnológicos que tem a sua disposição, estabelece uma relação entre os saberes a ensinar, o poder que o professor tem e a forma como explora os conhecimentos disponíveis, garantindo a aprendizagem sólida de seus alunos, lembrando-se de que a tecnologia utilizada como suporte pedagógico pode permitir que o aluno investigue e tenha mais autonomia.

É importante destacar que a formação de professores é importante para a integração das tecnologias na educação. Assim, é baseada em uma racionalidade instrumental que pressupõe o desenvolvimento de competências e habilidades docentes para a inserção das tecnologias no ambiente escolar como recursos pedagógicos. Logo, a mediação tecnológica é utilizada para designar a tecnologia utilizada pelo professor para facilitar o aprendizado do aluno.

A mediação pedagógica com o uso da tecnologia baseia-se na separação entre o sujeito e o objeto do conhecimento e no seu distanciamento das relações sociais concretas. A atividade do sujeito engloba processos externos e internos ao mesmo tempo.

A singularidade do ato instrumental [...] é sustentada pela presença simultânea nele de estímulos de ambos os tipos, ou seja, objeto e ferramenta, cada um dos quais desempenhando um papel qualitativa e funcionalmente diferente. Consequentemente, no ato instrumental entre o objeto e a operação psicológica dirigida a ele, surge um novo componente intermediário: o instrumento psicológico, que se torna o centro ou foco estrutural, na medida em que todos os processos que dão origem ao objeto são funcionalmente determinados ato instrumental (VYGOTSKY, 2001, p. 96).

Desse modo, práticas pedagógicas com uso de tecnologias digitais, com saberes compostos por saberes teóricos e práticos, construídos ou adquiridos, são indispensáveis. É importante que haja uma articulação entre as metodologias de

ensino, as TICs e os conteúdos a serem compartilhados, para transformar a aprendizagem escolar, sendo o educador um facilitador e orientador do processo.

Nesse sentido, as tecnologias digitais, em uso, constituem ferramentas mediadoras na construção do processo de ensino-aprendizagem, da habituação da cultura digital dentro do contexto educacional atravessado por barreiras e desafios. Para inserir a tecnologia em sala de aula, é necessário embasá-la em um planejamento alinhado ao conteúdo e essa ferramenta permite a integração de educadores e alunos para que possam realizar pesquisas e assimilar conhecimentos. Assim, buscamos estimular os alunos e despertar seu interesse, tornando o processo mais dinâmico e atrativo para eles.

Os recursos de TIC podem ser usados para controlar os caminhos percorridos pelo aluno, automatizar a resposta às suas atividades e fornecer feedback em resposta ao seu desempenho [...] Ensinar em ambientes de aprendizagem digitais e interativos significa: organizar situações de aprendizagem, planejar e propor atividades, disponibilizam materiais de apoio com o uso de múltiplas mídias e linguagens, possuem um professor que atua como mediador e orientador do aluno, buscando identificar suas representações de pensamento, fornecem informações relevantes e incentivam a busca por diferentes fontes de informação e experimentação. Nesse contexto, é necessário aprender a planejar, desenvolver ações, selecionar e enviar informações, estabelecer conexões, refletir sobre o processo de desenvolvimento junto com seus pares, desenvolver o aprendizado mútuo, competência na resolução de problemas em grupo e autonomia em relação à busca do fazer compreender para o aprimoramento e aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem, principalmente na modalidade a distância (SANTOS; VASCONCELOS, 2015, p. 11).

Conclui-se, portanto, que a tecnologia, quando bem utilizada, contribui para as práticas pedagógicas e promove maior conhecimento tanto para o professor quanto para o aluno.

2.2 O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA TECNOLÓGICA DE APOIO À APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA MATEMÁTICA

O GeoGebra foi introduzido no ensino educacional pelo professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg (Áustria) em 2001 e continuou em desenvolvimento na Florida Atlantic University. O programa permite fazer construções geométricas utilizando pontos, linhas, segmentos de linha, polígonos, entre outros, alterando todos esses objetos dinamicamente assim que a construção estiver concluída. O programa reúne ferramentas que permitem, em um único

ambiente visual, trabalhar as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. Além disso, a partir da versão 5.0 também é possível trabalhar com geometria em três dimensões (HOHENWARTER, 2019).

Assim, desde sua criação, o GeoGebra alcançou grande popularidade e atualmente é utilizado em 190 países, traduzido em 55 idiomas, possui mais de 300.000 downloads mensais e possui 62 Institutos GeoGebra em 44 países que apoiam seu uso. Ele ganhou muitos prêmios de software educacional na Europa e nos Estados Unidos e foi instalado em milhões de laptops em muitos países pelo mundo. Por ser software e código aberto, está disponível em vários idiomas, para milhões de usuários, no mundo, contando também com uma ferramenta para produção de aplicativos interativos, em páginas WEB e uma interface amigável, com diversos recursos sofisticados.

Além disso, o software GeoGebra possibilitou encontrar novas estratégias de ensino e de aprendizagem relacionadas à geometria, à álgebra, ao cálculo e à estatística, dando aos professores e aos alunos a oportunidade de explorar, conjecturar e investigar esses conteúdos na construção do conhecimento matemático.

Neste contexto, o GeoGebra é uma ferramenta que permite a quem o utiliza experimentar, resolver ou expressar ações, uma vez que o ele permite primeiro que a situação problemática se materialize e, posteriormente, oferece a oportunidade de aprofundar a compreensão do que está a ser exposto no problema. Desta forma, a base que surge de uma matematização é o que sustenta as estratégias e a obtenção de uma solução, já que o GeoGebra suporta as conjecturas levantadas. Logo, o Software permite a incorporação de recursos pedagógicos como ferramentas de ensino e facilitadores da aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento de habilidades e estimulando a construção de novos conhecimentos.

Contudo, os professores de matemática têm procurado contextualizar os conteúdos apresentados em sala de aula de forma a torná-los significativos para os alunos, para que possam construir novos conhecimentos, questionar e se apropriar do conhecimento. Vaz (2012) reafirma a importância de trabalhar com novas metodologias nas aulas de matemática e apresenta o software GeoGebra como um potencial pedagógico que proporciona, ao aluno, um processo de aprendizagem significativo que promova o caráter dedutivo e generalizador da matemática.

Além disso, o GeoGebra facilita a realização de construções geométricas, como o uso de pontos, de linhas, de segmentos de linha, de polígonos; possibilita inserir funções e alterar todos esses objetos, dinamicamente, após o término da construção. Assim, tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e no mesmo ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

Sob esse viés, o GeoGebra facilita ao aluno, no ambiente de sala de aula, a busca e a participação no processo de ensino-aprendizagem, agilizando assim as atividades. Diante disso, é importante ressaltar e refletir sobre o uso da informática em sala de aula e do software GeoGebra como recurso didático potencialmente significativo para o desenvolvimento geométrico. Segundo os autores Gerônimo, Barros e Franco (2010), o GeoGebra tem potencial para substituir o uso do caderno geométrico.

Consequentemente, podemos usar o GeoGebra, sua interface gráfica e suas ferramentas para desenhar linhas, ângulos, círculos, entre outros. Entre as vantagens do uso do GeoGebra está a possibilidade de as construções serem dinâmicas. Isso garante que o usuário realize uma grande quantidade de experimentação que lhe permita construir proposições geométricas (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010, p. 11).

Posto isso, entende-se que a utilização deste recurso auxilia no ensino e na aprendizagem da matemática, destacando-se, no entanto, que o GeoGebra sem orientação pedagógica não desenvolve conhecimento, exigindo do professor uma boa preparação da atividade, pois domínio no uso do material pedagógico, para que haja desenvolvimento tanto do professor quanto do aluno, é necessário um processo dinâmico de investigação e de compreensão da matemática.

Em síntese, a evolução das tecnologias muda a forma de ensinar e de aprender e, conseqüentemente, transforma recursos tecnológicos em recursos pedagógicos, facilitando o aprendizado. Ademais, torna-se obrigatório repensar métodos de ensino e prática pedagógica, no campo da matemática, adequados à realidade em que alunos e professores estão inseridos. Em breve serão obtidos bons resultados, entre os quais, o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e aplicação prática dos conceitos teóricos adquiridos.

2.3 ALGUNS ESTUDOS DESENVOLVIDOS ENVOLVENDO TECNOLOGIA E GEOGEBRA

Na elaboração da presente proposta de investigação, o método utilizado foi a pesquisa bibliográfica, ancorada na literatura publicada, tais como livros, artigos e revista técnicas na área da educação, que tem como referencial teórico Davydov e Vygotsky, uma vez que a Teoria do Ensino Desenvolvimental tem como base a Teoria histórico-cultural e busca usufruir de outras as literaturas publicadas na área da educação, de renome como José Carlos Libâneo, grande defensor da teoria de Davydov, e que vem há muitos anos divulgando tal ideia e proposta pedagógica.

Para preparar esta seção, buscamos no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), trabalhos relacionados ao esse tema. As palavras-chave tecnologias, em sala de aula, GeoGebra como ferramenta tecnológica e tecnologia foram utilizadas como marcadores. Também foi utilizado um período de 5 anos (2017-2022). A partir desta pesquisa, utilizamos três obras como artefatos teóricos, conforme demonstrado a seguir:

Quadro 1 – Publicação de temas relacionados

Tipo	Tema e Pequena descrição	Instituição	Ano
Tese	O professor estagiário de pedagogia e o desenvolvimento do conhecimento pedagógico e tecnológico do conteúdo no ensino de matemática nos anos iniciais: experiência formativa em uma IES do sudoeste de Goiás/Brasil. (PURIFICAÇÃO, 2022).	UNIVATES	2022
Dissertação	Um estudo de curvas planas utilizando o GeoGebra. (MIYASAKI, 2017).	UFG	2017
Dissertação	O software GeoGebra numa proposta de formação continuada de professores de matemática do ensino fundamental. (ARAÚJO, 2017).	UFOP	2017

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

O trabalho desenvolvido por Purificação (2022), foca numa experiência formativa desenvolvida a partir do modelo TPACK – (Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo) no sudoeste de Goiás. Entre os artefatos tecnológicos utilizados, usou-se em uma das oficinas, o software GeoGebra, sobre o qual fundamenta que esse artefato visa a estimular o aprendizado, conjecturar os conceitos matemáticos e tornar a aula mais produtiva, dinâmica e interessante. Os

objetivos propostos pelo autor, para inserção do GeoGebra no curso de formação, foram:

Aplicação de práticas pedagógicas. Resolver problemas matemáticos práticos usando situações do dia a dia. Desenvolver a capacidade de argumentação, construção de análises, justificações procedimentais, com base em problemas matemáticos dos conteúdos curriculares dos anos iniciais (PURIFICAÇÃO, 2022, p. 139).

Para Purificação (2022), o GeoGebra oferece novas perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Além disso, aumenta o interesse dos alunos pela Matemática, contribuindo para um resultado de conhecimento satisfatório. “Acredito que o GeoGebra foi amplamente reconhecido e aceito pelos cursistas do Curso de Formação e considerado importante para uso nas aulas de Matemática” argumentou uma das participantes do Curso de Formação (P3, 2020).

A pesquisa desenvolvida por Purificação (2022) estabelece uma ligação com a pesquisa que desenvolvo, uma vez, que busca inovar a prática docente, trazendo as tecnologias como aliadas do processo de aprendizagem, tornando-o mais ativo, dinâmico e significativo para o aluno.

O segundo estudo desenvolvido por Miyasaki (2017) propôs a utilização do software GeoGebra como ferramenta no estudo de curvas planas. Segundo o autor, o software foi escolhido por ser uma poderosa ferramenta de ensino e de aprendizagem em todos os níveis da matemática, pois trabalha com álgebra e geometria, permitindo ao usuário, realizar operações algébricas e gráficas em uma mesma interface. Os temas abordados vão desde curvas planas paramétricas até o estudo do referencial Frenet, tornando o GeoGebra uma importante ferramenta para o estudo e visualização dos conceitos abordados.

O estudo desenvolvido por Araújo (2017) teve como objetivo utilizar recursos didáticos baseados no uso de tecnologias no ensino da matemática, proporcionando um olhar importante sobre o trabalho dos alunos, em formação, e do próprio professor, pois permitem a construção de conhecimentos sólidos que podem ajudar, principalmente, no desenvolvimento de sujeitos ativos na sociedade moderna. Para a utilização das tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem, os docentes devem ser capacitados nesse uso, em especial por meio de formação contínua aliada a instrumentos como atividades exploratórias e softwares educacionais, com destaque para o GeoGebra. Essa formação pode capacitar os professores a inovar

as práticas pedagógicas e metodológicas nos processos de ensino da matemática. Assim, o uso do GeoGebra pode promover uma aprendizagem significativa para os alunos e possibilitar novas práticas pedagógicas para os professores (ARAÚJO, 2017).

Em suma, esses três estudos mostram a necessidade de romper com as teorias que favorecem a formação do conhecimento superficial, que leva à formação de conceitos empíricos, e ir além, organizando corretamente as atividades de estudo, para conduzir os alunos à formação do pensamento teórico. A teoria do desenvolvimento pedagógico, ao ensinar os alunos a se orientarem e a pensarem contribui para o seu desenvolvimento pessoal, como para o desenvolvimento de uma nova escola e de uma nova sociedade (BRITO; BRITO, 2019).

A Teoria do Ensino Desenvolvimental permite que as escolas atinjam os seus objetivos nos dias atuais no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para melhoria da qualidade da educação. Visto que a nossa sociedade é muito dinâmica e está constantemente em mudanças e transformações, as novas tecnologias estão surgindo a todo momento, como máquinas, robôs, e substituindo cada vez mais a mão de obra humana, evidenciando cada vez mais no mercado de trabalho, uma acirrada conquista por uma vaga de emprego. Com isso o objetivo da escola nos dias de hoje, é o de fazer com que os alunos aprendam a aprender e desenvolvam sua capacidade mental, o seu cognitivo, para que possam exercer e atuar na sociedade em que estão inseridos de maneira satisfatória. A Teoria do Ensino Desenvolvimental propõe desenvolver a capacidade mental, cognitivo do aluno, por meios dos conteúdos, sendo que o cerne dessa teoria está voltado para formação de conceitos, o aluno é protagonista e participa da formação de conceito, e não simplesmente o memoriza e pronto.

CAPÍTULO 3 – O SOFTWARE GEOGEBRA E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONTEÚDO DE CURVAS PLANAS

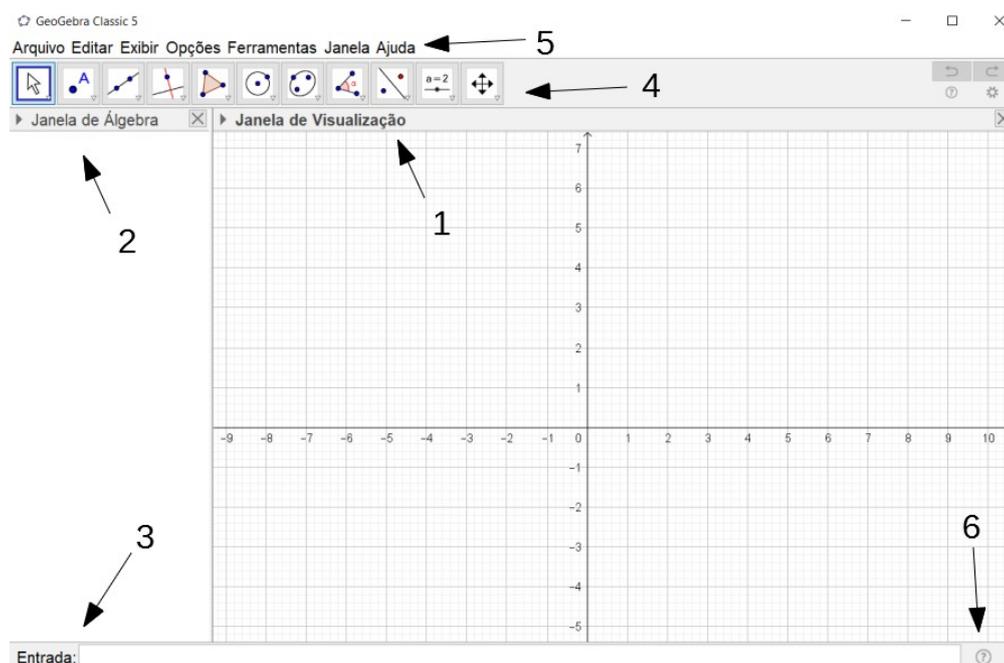
Neste capítulo apresentamos pontos reflexivos que favorecem o processo de aprendizagem a partir do tripé: GeoGebra, Curvas planas e Teoria do Desenvolvimento do ensino. Propomos uma investigação inspirada na proposta de Vaz (2012), baseada nas ações experimentação, conjecturação, formulação e generalização do saber matemático. Estas permitem, tanto ao professor quanto ao aluno, se articularem no processo de ensino-aprendizagem, transformando a informação em um modelo fundamentando na construção do saber.

Vaz (2012) reafirma a importância de se trabalhar metodologias nas aulas de matemática, e apresenta o software GeoGebra como potencialidade pedagógica que permite ao discente um aprendizado significativo, promovendo o caráter dedutivo e generalizante da matemática. Na sequência deste capítulo temos O GeoGebra como artefato no aprendizado de curvas planas.

3.1 O SOFTWARE GEOGEBRA COMO ARTEFATO

O GeoGebra possui uma interface de usuário que possui vários recursos. A interface da tela inicial consiste em duas janelas: a janela de álgebra e a janela de visualização. Também é exibido o campo de entrada, onde são inseridas equações, funções, coordenadas de pontos, comandos de teclado, que, ao pressionar a tecla “Enter”, são exibidos na janela de exibição. Embora a versão 6.0 já esteja disponível, usamos a versão 5.0 neste trabalho porque é, em nossa opinião, no momento melhor em alguns aspectos do que a versão mais recente. A tela principal, do software é, em geral, independente do sistema operacional, semelhante à mostrada na Figura 1. Descrevemos cada elemento componente abaixo.

Figura 1 – Tela de trabalho do GeoGebra



Legenda: 1. A janela de visualização é um ambiente de visualização geométrica, onde podemos criar objetos como pontos, linhas, polígonos, cones, etc. Você pode inserir e interagir com números; texto simples e texto em formato latex, e possui cartesianos eixos e de malha, que podem ser ocultados se necessário.

2. Em álgebra, o ambiente não apresenta objetos numéricos, equações e funções, coordenadas de pontos e listas (conjuntos).

3. O campo de entrada destina-se a receber fórmulas, funções, coordenadas de pontos e comandos a serem executados. Nas seções a seguir, apresentamos, como exemplos, os principais comandos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

4. A barra de ferramentas, como o próprio nome sugere, contém as principais ferramentas para criação e manipulação de objetos geométricos, textos, desenhos e imagens. Na seção 1.3 mostramos como criar novas ferramentas (comandos) e disponibilizá-las nesta posição.

5. O menu principal oferece, como a maioria dos programas, opções relacionadas a salvar trabalhos, abrir trabalhos criados anteriormente, exportar imagens, editar objetos, visualização de janelas, arredondamento e configuração do número de casas decimais, idiomas, gerenciamento de ferramentas, ajuda via tutoriais e software . versão informação.

6. Ao acionar o botão Ajuda, aparecerá uma janela com a lista de todos os comandos divididos por categorias, com possibilidade de ajuda através do guia disponível no site oficial (em inglês).

Fonte: Geogebra (2020).

Além das janelas mencionadas (1 e 2), temos também a janela CAS, as planilhas, a janela de visualização 3D, o protocolo de construção e a calculadora de probabilidade. Não apresentaremos cada uma das janelas mencionadas, pois não serão utilizadas no desenvolvimento do livro. O leitor interessado pode encontrar mais informações no manual do GeoGebra (2020).

Uma peculiaridade dos *scripts* propostos nesta pesquisa é a construção “ponto a ponto” do gráfico graças à função “HABILITAR RASTRO”. A função é inserida de uma maneira diferente da comumente usada: digite a função diretamente

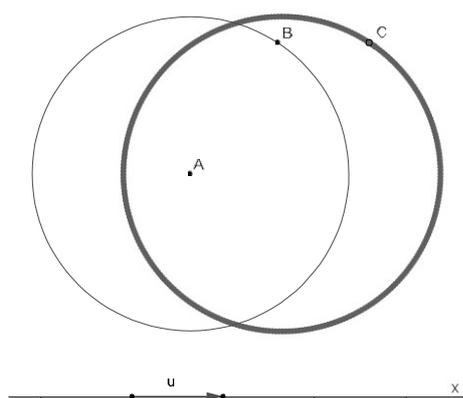
no campo de entrada e o GeoGebra exibe o gráfico diretamente. Graças à função "HABILITAR RASTRO", o aluno "desenha" um gráfico composto por pontos com coordenadas $(x, f(x))$, obtidas quando o eixo é feito em abscissa, seja "arrastando-o" com o comando "MOVER" ou ativando o comando "ANIMAR" (OLIVEIRA, 2018).

- **Demonstração 1.** Neste exemplo, demonstramos uma construção que usa as opções enable trail e animate para renderizar um círculo.

1. Crie um círculo com centro em qualquer ponto A e qualquer raio R;
2. Crie o vetor u paralelo ao eixo x;
3. Defina o ponto B vinculado à circunferência, ou seja, B deve variar apenas na circunferência;
4. Ponto de ajuste $C = B + u$;
5. Ative a opção habilitar rastreamento para o ponto C;
6. Clique com o botão auxiliar do mouse no ponto B e selecione a opção animar.

Veja o resultado na Figura 2.

Figura 2 – Opção Habilitar Rastro e Animar



Fonte: Amanda Felix

3.1.1 Alguns Comandos do Geogebra

Nessa seção exemplificamos alguns comandos do Geogebra. A saber:

- a) **Ponto** - (*<Objeto>*)

Cria um ponto vinculado ao objeto geométrico, ou seja, o ponto resultante pode ser movido sobre o objeto.

- **Demonstração 2.** Seja r uma reta qualquer, o comando $P = \text{Ponto}(r)$ cria um ponto sobre a reta.

Figura 3 – Comando *Ponto*



Fonte: Amanda Felix Oliveira

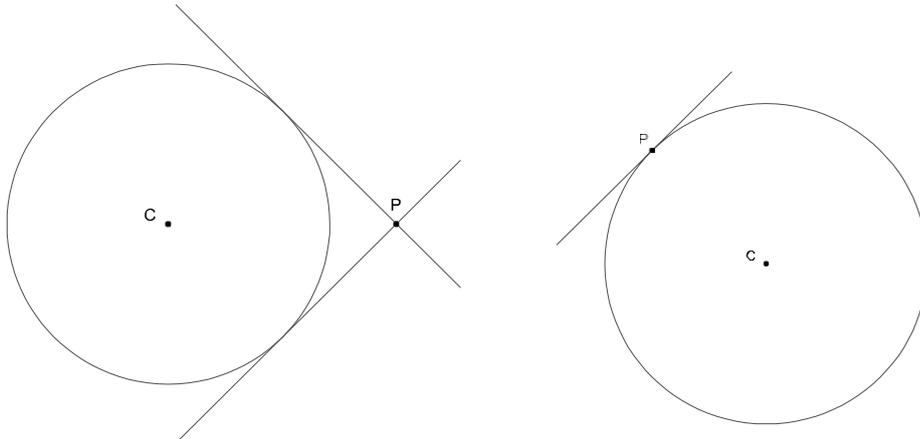
b) Tangente

$\text{Tangente}(\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Curva ou C\~{o}nica} \rangle)$

Pode ser usado de duas maneiras; na primeira ele cria todas as retas tangentes passando por um ponto P até uma seção cônica; na segunda, cria a tangente no ponto especificado pertencente à curva.

- **Demonstração 3.** Sejam $P = (-1, 1)$ e a curva $c := x^2 + y^2 = 2$, objetos definidos em uma construção do GeoGebra. Usando o comando $\text{Tangent}(P, c)$, obtemos a linha $-x + y = 2$, como podemos ver na Figura 4.
- **Demonstração 4.** Para a mesma curva c do exemplo anterior e o ponto $P = (2, 0)$ retorna as retas $r : -x - y = -2$ e $s : x - y = 2$ pelo uso do comando $\text{Tangente}(P, c)$. Veja a Figura .4

Figura 4 – Exemplo do uso do comando Tangente



P exterior ao círculo (b) P sobre o círculo
 Fonte: Amanda Felix Oliveira

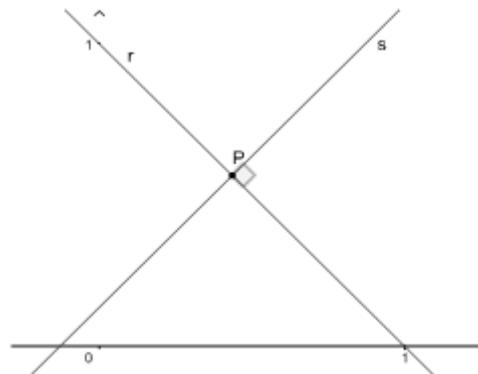
c) Girar

Girar (<objeto>, <^ângulo> ,<ponto>)

Gira o objeto geométrico pelo ângulo em torno do ponto. Se o argumento de ponto for omitido, o objeto de geometria gira em torno da origem, exceto para vetores, que giram em torno de seu ponto inicial.

- **Demonstração 5.** Podemos criar uma reta s perpendicular à reta r: $x + y = 10$ pelo comando s: Girar(r,Pi/2,P), onde P é um ponto pertencente a r.

Figura 5 – Retas perpendiculares



Fonte: Amanda Felix Oliveira.

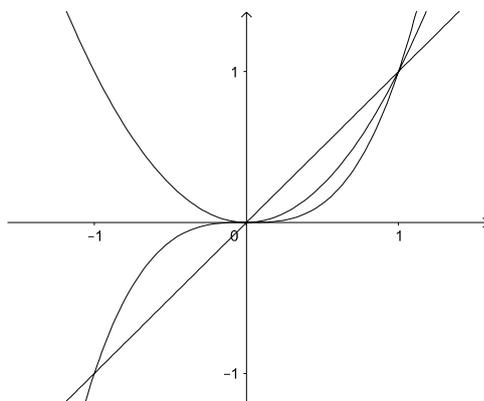
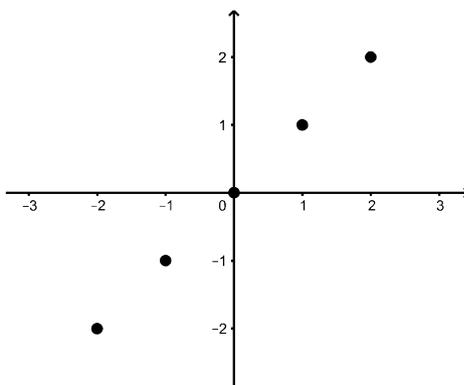
d) Sequência

Sequência (<Expressão>, <var>, <a>,)

Cria uma sequência de objetos definida pela expressão na variável var , iniciando sua contagem em a e terminando em b . A expressão pode definir objetos de diferentes formas, como pontos, funções, cônicas e outros.

- **Demonstração 6.** O comando `Sequence(2k, k, 1, 10)` cria uma lista contendo números pares entre 2 e 20.
- **Demonstração 7.** O comando `Sequence((k, k), k, -2, 2)` cria uma lista contendo pontos de coordenadas inteiras na linha $x = y$ no intervalo $[-2, 2]$. Veja a Figura 6.
- **Demonstração 8.** O comando `Sequência(x^i , i , 1, 3)` cria a lista de funções $L = \{x, x^2, x^3\}$. Veja a Figura 6.

Figura 6 – Exemplo Sequência



Fonte: Amanda Felix Oliveira

e) Se

(<Condição>, <a>,)

Retorna a caso a condição seja satisfeita ou b caso contrário.

- **Demonstração 9.** Ao inserir $f(x) = \text{Se } (x=0, 0.1/x)$ no campo de entrada, definimos a função $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ com $f(0) = 0$

f) Spline

$Spline(\langle ListaPontos \rangle, \langle Grau \rangle)$

Interpola uma curva por spline de *Grau* maior ou igual a 3, que passa por todos os pontos da lista (conjunto) *ListaPontos*. O argumento *Grau* pode ser omitido.

- **Demonstração 10.** Usando o comando $Spline(L)$ para a lista $L = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$ obtemos a curva *a* dada por

$$x = \text{Se } (t < 0.5, 0 t^3 + 0 t^2 + 2 t \quad -1, 0 t^3 + 0 t^2 + 2 t \quad -1)$$

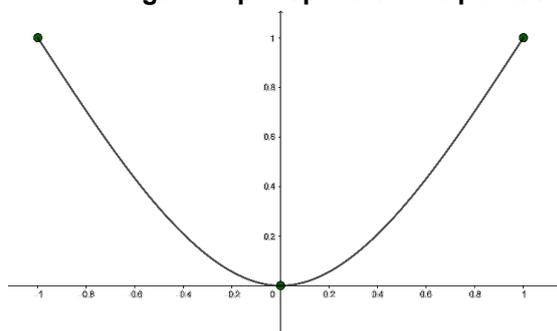
a :

$$y = \text{Se } (t < 0.5, 4 t^3 + 0 t^2 - 3 t + 1, -4 t^3 + 12 t^2 - 9 t + 2)$$

} $0 \leq t \leq 1$.

Veja a Figura 8 a seguir.

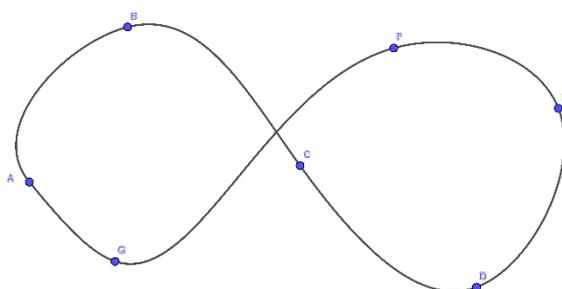
Figura 7 – Curva gerada por spline com 3 pontos



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

- **Demonstração 11.** Considere a lista $L = \{A, B, C, D, E, F, G, A\}$ composta pelos pontos de A a G dispostos conforme a Figura 9. O comando $Spline(L, 3)$ cria a curva com início e fim no ponto A.

Figura 8 – Curva criada por um spline de grau 3



g) Curva

Curva(<curva parametrizada>, <parâmetro>, <a>,)

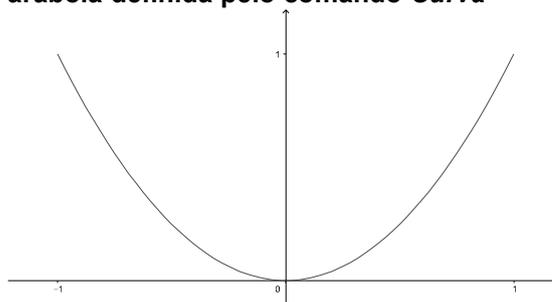
Define o traço de uma curva parametrizada por um parâmetro no intervalo $[a, b]$.

- **Demonstração 12.** O comando $a: \text{Curva}((t,t**2), t, -1, 1)$ define a parábola $f(x) = x^2$ no intervalo $[-1, 1]$. Veja o resultado na Figura 9.

h) Lugar Geométrico

LugarGeométrico(<P>, <A>)

Figura 9 – Parábola definida pelo comando Curva



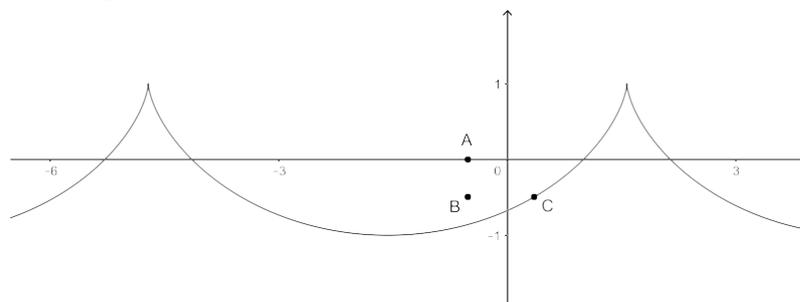
Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

Determina a curva definida pelo ponto do lugar geométrico P que deve depender de outro ponto A . Também pode ser usado de outras maneiras, o leitor interessado pode buscar mais informações através da *ajuda* do próprio GeoGebra.

- **Demonstração13.** Considere A um ponto vinculado ao eixo x . Definimos um

ponto B por $B = A + \sin(x(A)) \cdot (0, 1)$ e um ponto C por $C = B + \cos(x(A)) \cdot (1, 0)$, sendo que $x(A)$ assume o valor da abscissa do ponto A . Ao usar o comando *LugarGeométrico(C,A)* obtemos o resultado apresentado na Figura 10.

Figura 10 – Parábola definida pelo comando *Curva 2*



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

i) Derivada

Derivada(<função ou curva>, <n>)

Determina a n-ésima derivada da função ou curva.

- **Demonstração 14.** Seja $f(x) = x^2$. O comando *Derivada(f)* retorna $g(x) = 2x$, já o comando *Derivada(f,2)* retorna $g(x) = 2$.

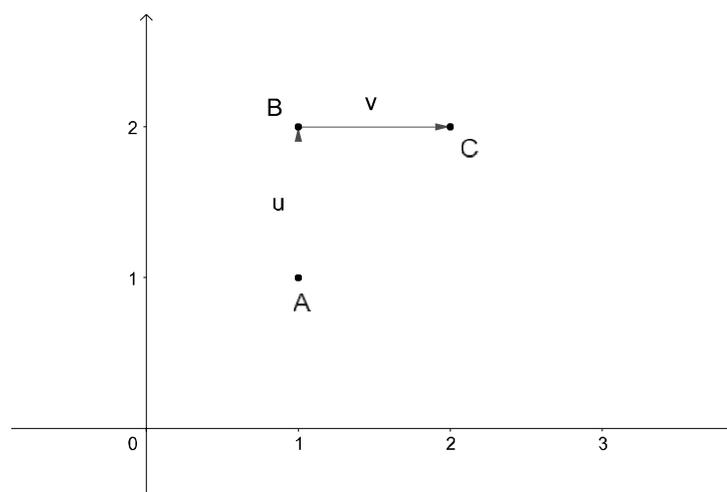
j) Vetor

Vetor(<A>,)

Cria o vetor com ponto inicial A e ponto final B. Caso A seja omitido, o ponto inicial será a origem.

- **Demonstração 15.** Considere os vetores $u = \text{Vetor}(A, B)$ e $v = \text{Vetor}(B, C)$, sendo $A = (1, 1)$, $B = (1, 2)$ e $C = (2, 2)$, o resultado pode ser visualizado na Figura 11.

Figura 11 – Exemplo do comando *Vetor*



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

k) Comprimento

Comprimento(<curva>, <a>,)

Determina o comprimento da curva no intervalo $[a, b]$. Também pode ser usado de outras maneiras, como para determinar o comprimento de um vetor ou segmento. Para mais detalhes, consulte a ajuda do GeoGebra.

- **Demonstração 16.** Vamos determinar o comprimento da parábola apresentada na demonstração 12. O comando $d = \text{Comprimento}(a, -1, 1)$ retorna $d = 2.96$.

3.1.2 A construção de ferramentas

Além dos comandos oferecidos pelo GeoGebra podemos criar novos comandos, denominados por ferramentas, que executam e retornam algum resultado (um ou mais objetos) para um determinado processo que podemos “ensinar” ao *software*. No exemplo a seguir, mostramos como criar uma nova ferramenta personalizada.

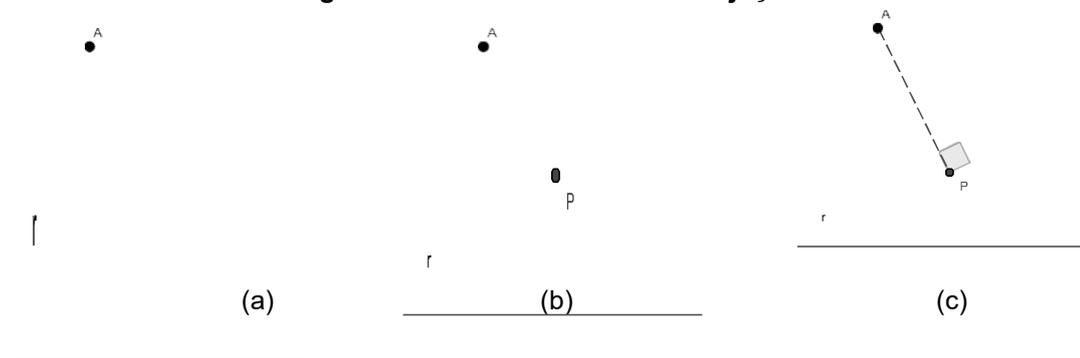
- **Demonstração 17.** Vamos criar uma ferramenta que irá determinar a projeção de um ponto sobre uma reta. O primeiro passo é construir o processo a ser executado pela ferramenta, ou seja, dado um ponto A e uma reta r , queremos o

ponto P sobre a reta tal que o segmento AP seja ortogonal a mesma (veja a Figura 13c). Os passos são:

- Crie um ponto A ;
- Crie uma reta r ;
- Crie a reta s perpendicular a r passando por A ;
- Determine a interseção P entre as retas r e s .

Após esses passos, o processo a ser reproduzido pela nova ferramenta está concluído. Assim, selecione criar nova ferramenta na aba Ferramentas, especifique o objeto final (ponto P), os objetos iniciais (ponto A e reta r) e, finalmente, os nomes da ferramenta e do comando. Uma observação importante é que o nome do comando não pode conter espaços, e a ordem dos objetos finais determina a ordem dos argumentos do comando. Em nosso exemplo, nomeamos a ferramenta por **Projeção de ponto em reta** e o comando por **ProjeçãoP**. Agora, o comando **ProjeçãoP** pode ser usado no campo de entrada da forma **ProjeçãoP(A, r)**, sendo A e r um ponto e uma reta quaisquer. As Figuras 12a e 13b ilustram, respectivamente, o antes e o depois do uso do comando.

Figura 12 – Uso da ferramenta *ProjeçãoP*



Fonte: Autor (ano).

Finalizamos esta breve apresentação do *software* recomendando os livros de Araújo e Nobriga (2010) e Souza (2018). O primeiro apresenta detalhadamente cada ferramenta do GeoGebra e trabalha conteúdos de matemática básica como ângulos, triângulos, quadriláteros, teorema de Tales, funções afim e quadráticas, razão áurea e trigonometria básica. O segundo livro é um projeto ainda em desenvolvimento do Instituto GeoGebra de Goiás, que fornece uma versão, em português, adaptada do guia oficial de comandos em inglês(BOYER, 1974).

Acreditamos que estas leituras complementares são de grande importância para o desenvolvimento crítico construtivo do leitor interessado neste tipo de trabalho.

3.2 CURVAS PLANAS

Neste seção apresentamos os conceitos básicos para Curvas Planas, utilizando as concepções teóricas de Tapp (2016) e Tenenblat (2008).

3.2.1 Curvas parametrizadas e diferenciáveis

Definição. Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 que associa para cada $t \in I$ o elemento $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ na forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

onde t é o parâmetro e o subconjunto dos pontos $\alpha(t)$ de \mathbb{R}^2 é dito o traço de α .

Exemplo 1. Considere as curvas $\alpha(t) = (t + 1, t + 2)$ e $\beta(t) = (t, |t|)$ com $t \in \mathbb{R}$. A curva α é uma curva parametrizada diferenciável e seu traço é uma reta paralela ao vetor $(1, 1)$ que passa pelo ponto $(1, 2)$. Já β não é uma curva parametrizada diferenciável, pois

$|t|$ não é diferenciável em $t = 0$.

Definição. Seja C uma cônica. A aplicação $\alpha : G \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma parametrização de C se o conjunto imagem $\alpha(G)$ coincide com C , ou seja,

$$C = \alpha(G) = \{(x(t), y(t)); t \in G\},$$

onde G é um subconjunto de \mathbb{R} .

Exemplo 2. Uma elipse é obtida ao cortar uma superfície cônica circular com um plano

que não é paralelo a nenhuma das geratrizes do cone, e corta apenas uma de suas folhas. Sua equação é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

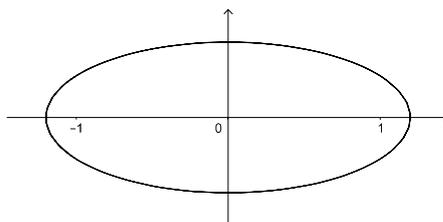
e pode ser representada pela aplicação

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Assim, $\alpha(t)$ é uma curva parametrizada diferenciável. Note também que, se $a = b$, temos uma circunferência.

Para criar a curva do exemplo no GeoGebra, basta inserir sua forma paramétrica $(a \cos t, b \sin t)$ no *campo de entrada* e apertar o botão *enter*. Caso os coeficientes a e b ainda não estejam definidos, uma janela será exibida sugerindo que *controles deslizantes* sejam criados para elas. Veja o resultado na Figura 13.

Figura 13 – Elipse com $a = 6$ e $b = 1$



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

3.2.2 Vetor tangente

Definição. Dada uma curva parametrizada

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

definimos para todo $t \in I$ o vetor $\alpha^j(t)$, denominado **vetor tangente** de α em t pela expressão

$$\alpha^j(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h},$$

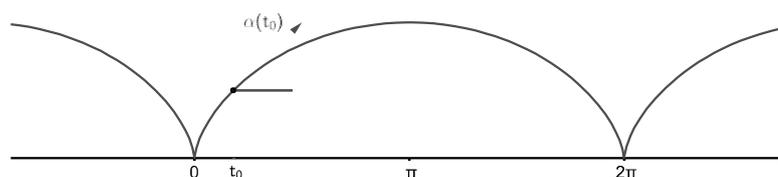
onde h é suficientemente pequeno de tal modo que $t+h \in I$. O limite acima equivale a

$$\alpha^j(t) = (x^j(t), y^j(t)).$$

Exemplo 3. Uma cicloide é a curva obtida pela trajetória de um ponto P pertencente a uma circunferência quando esta gira sem deslizar sobre uma reta (veja a Figura 15). Suas equações paramétricas são $x(t) = t - \sin t$ e $y(t) = 1 - \cos t$. Derivando α , temos $x^j(t) = 1 - \cos t$ e $y^j(t) = \sin t$. Então, o vetor tangente à $\alpha(t)$ é dado por

$$\alpha^j(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Figura 14 – Cicloide e seu vetor tangente em $t = \pi$



Fonte: Amanda Felix Oliveira

Assim, a equação da reta r tangente a` curva $\alpha(t)$ em um ponto t_0 qualquer é $r(t) = \alpha(t_0) + t \cdot \alpha'(t_0)$, $t \in \mathbb{R}$.

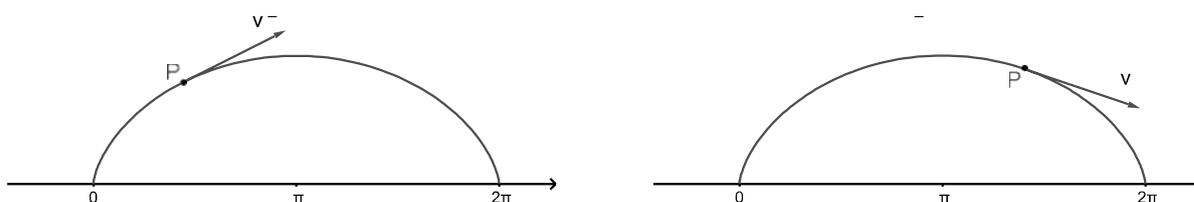
No GeoGebra, podemos obter de forma dinâmica o vetor tangente. Apresentamos a seguir, os passos para sua construção, sendo α uma cicloide, sem perda de generalidade.

- Crie a cicloide inserindo sua forma paramétrica $a = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ no *campo de entrada*. Note que, por padrão, o intervalo de variação para o parâmetro será $[0, 2\pi]$;
- Crie o vetor tangente com o comando $d = \text{Derivada}(a)$;
- Crie um controle deslizante t_0 variando no intervalo de definição ao da curva;
- Crie o ponto P pertencente à cicloide através do comando $P = \underline{a}(t_0)$;
- Finalmente, para obtermos o vetor tangente á curva partindo do ponto P , inserimos o comando $v = \text{Vetor}(P, P + d(t_0))$;
- O último passo é criar a ferramenta (comando) **VetorTangente explicado** anteriormente. Os objetos de entrada são o parâmetro t_0 e a curva a . O objeto de saída é o vetor tangente v . Qualquer que seja a curva, o vetor tangente será calculado de acordo com a mesma.

Ao variar o parâmetro t_0 , o GeoGebra atualiza as coordenadas de P e calcula novamente o vetor v (veja a Figura 16). Podemos, ainda, obter a reta r tangente á curva usando o comando $r = \text{Reta}(P, v)$ ou $r = \text{Tangente}(P, a)$.

(a) $t_0 = 2.2$ (b) $t_0 = 3.6$

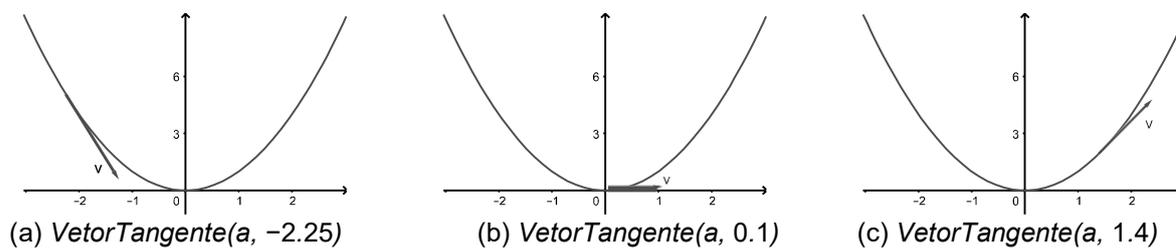
Figura 15 – Exemplo de variação do parâmetro t_0



Fonte: Amanda Felix Oliveira

Exemplo 4. Considere a parábola $f(x) = x^2$ e sua parametrização $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos α parametrizada e diferenciável. No GeoGebra, inserindo α no campo de entrada com $a = \text{Curva}((t, t^{**2}), t, -5, 5)$ e usando a ferramenta *VetorTangente* criada no exemplo anterior, obtemos as Figuras 16a, 16b e 16c para os valores -2.25 , 0.1 e 1.4 de t_0 , respectivamente.

Figura 16 – Exemplo do uso da ferramenta *VetorTangente*



(a) *VetorTangente*($a, -2.25$)

(b) *VetorTangente*($a, 0.1$)

(c) *VetorTangente*($a, 1.4$)

Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

3.2.3 Curvas Regular

Definição. Dada uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dizemos que α é regular quando $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Exemplo 5. A parábola apresentada anteriormente é uma curva regular, já que $\alpha'(t) = (1, 2t)$ nunca é nulo.

Exemplo 6. A curva $\beta(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ não é regular, pois $\beta'(t) = (2t, 3t^2)$ é nulo se $t = 0$.

Proposição. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, então α é localmente injetiva. Em particular, α é uma curva regular de classe C^1 .

Seja $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ e $t_0 \in I$. Como $\alpha'(t) \neq 0$, temos $x_i'(t_0) \neq 0$ para algum i . Se $x_i'(t_0) > 0$, como por hipótese a derivada x_i' é contínua, existe um intervalo aberto $J_{t_0} \subset I$ contendo t_0 tal que $x_i'(t) > 0$ para todo $t \in J_{t_0}$; segue que x_i é crescente neste intervalo, em particular injetiva, logo α também é. Se $x_i'(t_0) < 0$, o mesmo argumento implica a existência de um intervalo aberto $J_{t_0} \subset I$ contendo t_0 onde x_i é decrescente, em particular injetiva. Logo, α também é.

3.2.4 Comprimento do Arco

É chamada de função comprimento de arco da curva α de t_0 . A derivação para s está disponível em Stewart (2008, p. 658-659). No GeoGebra, o comprimento de uma curva a em um intervalo $[t_0, t_n]$ pode ser obtido com o comando Comprimento ou com o comando $\text{Integral}(\sqrt{(x'(a))^2 + (y'(a))^2}, t_0, t_n)$.

Exemplo 7. Para a cicloide apresentada no Exemplo 2.6, usando o comando $s = \text{Comprimento}(a, 0, 2\pi)$, obtemos como resultado $s = 8$. Isso significa que, para uma cicloide formada por um círculo de raio $r = 1$, temos, para cada ciclo completo, um aumento de 8 unidades no comprimento da curva.

Definição. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada por comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in I$ tal que $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0$$

Conclui-se que uma curva regular $I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\forall t \in I$ tivermos $|\alpha'(t)| = 1$.

3.2.5 Mudança de Parâmetro

Definição. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável de classe C^∞ tal que sua primeira derivada não se anule em todos os pontos de J e $h(J) = I$. Quando $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reparametrização de α é ditada por h e a função h é chamada de mudança de parâmetro.

Exemplo 8. A função $t = (b - a) \theta + a$, $\theta \in [0, 1]$, $a < b$ é uma mudança de parâmetro do intervalo $\theta \in [0, 1]$ sobre $t \in [a, B]$. A inversa $\theta = (t - a) / (b - a)$ é a mudança de parâmetro do intervalo $t \in [a, b]$ sobre $\theta \in [0, 1]$.

Proposição. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s: I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α de t_0 . Depois há a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β é parametrizado pelo comprimento do arco.

3.2.6 Interfaces GeoGebra e Curvas Planas

Vaz (2012), utilizando as ideias de Investigação Matemática na sala de aula de [6], propõe Investigação Matemática com GeoGebra. Ele percebeu, em sua pesquisa, que atividades mediadas por software poderiam levar a uma melhor compreensão das essências dos objetos estudados. Vaz ressalta a importância de o aluno ver o objeto, e o software permite que a representação geométrica e algébrica seja visualizada dinamicamente. As articulações entre as representações permitem ao aluno compreender o objeto em toda a sua essência.

A proposta de Pesquisa Matemática com o GeoGebra visa integrar pesquisa e ensino, garantindo que o professor investigue enquanto ensina e o aluno participe ativamente do processo, investigando os problemas propostos com os quais desenvolver matematicamente.

Na proposta de Vaz (2012), a Pesquisa Matemática se dá a partir do desenvolvimento das etapas de experimentação, conjectura, formalização e generalização. Estas permitem que tanto o professor quanto o aluno se articulem no processo de ensino-aprendizagem, transformando a atividade docente para a construção do conhecimento.

O instrumento básico, em todas as etapas, é o laboratório de informática onde, no experimento, são utilizados softwares para visualizar conceitos, propriedades, representações de algo, hebraico e geométrico, e o movimento de objetos matemáticos. Na fase de formulação de conjecturas, são analisadas as propriedades, relações e resultados gerais úteis no desenvolvimento do ensino da matemática, permitindo ao aluno colocar um problema a investigar.

Na fase de formalização, é necessário demonstrar o fato matemático da proposição.

A rigor, ou uma contraproposta da conjectura levantada, levando em consideração o nível (fundamental, intermediário ou superior) em que você trabalha. A generalização trata de investigar outras situações e explorar o alcance do resultado obtido.

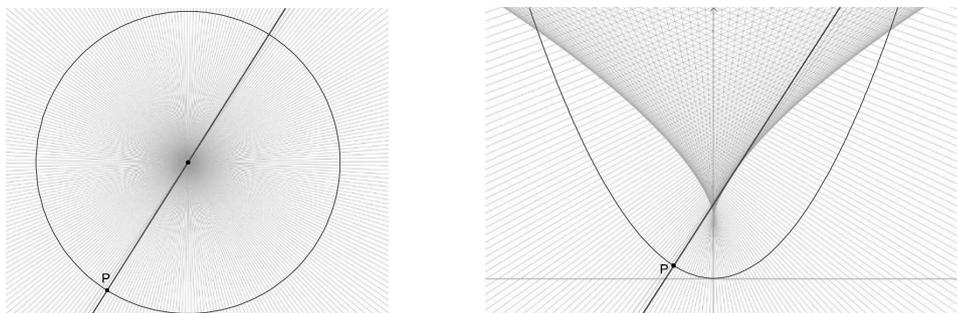
Construímos sobre esses ideais para a proposta apresentada neste capítulo. Apresentamos uma sugestão para um experimento usando Investigação Matemática com GeoGebra, aplicando os quatro passos de Vaz (2012) a curvas planas, para determinar que têm evoluções semelhantes a si mesmas, ou seja, a evoluta é a composição de transformações como translação, rotação, dilatação ou contração. Em particular, investigaremos as famílias de cicloides e epicloides.

3.2.7 Investigação matemática com GeoGebra

Mostramos, no Teorema 2.28, que a normal a uma curva α é tangente a β , sendo β a evoluta de α , e a Definição 2.32 nos leva a concluir que a evoluta pode ser definida pela envoltória das normais a α . Através deste resultado, podemos ter uma ideia de como se comporta a evolução de uma curva, sem fazer grandes cálculos, apenas utilizando as funções Enabletrail e Animate do GeoGebra.

Exemplo 9. Em exemplos anteriores, mostramos que a envolvente de um círculo é um único ponto e, especificamente, seu centro

Figura 17 – Evolutas



(a)

(b)

Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

Na Figura 17 a, mostramos esta representação no GeoGebra desenhando a linha normal à circunferência, conforme descrito no Exemplo 2.33. É possível notar que a família de retas são todas tangentes ao ponto central. Da mesma forma, podemos verificar que a evoluta da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ não é uma parábola (ver Figura 18b). Portanto, essas curvas não se encaixam na classe de curvas que estamos investigando.

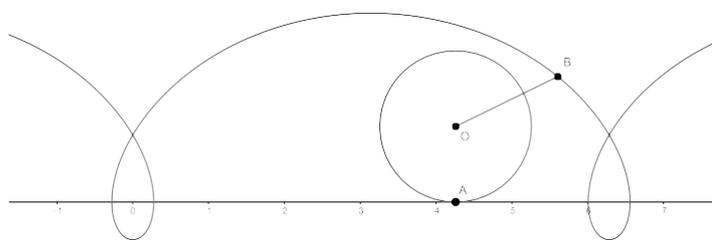
3.2.8 Trocoides

Definição. Considere um círculo com centro O e raio r e um raio OB . o trocoide é o lugar geométrico do ponto B , quando a circunferência gira em uma linha reta s , sem escorregar. A curva parametrizada e diferenciável é dada por

$$\alpha(t) = (Rt - b \sin(t), R + b \cos(t)), t \in [0, 2\pi].$$

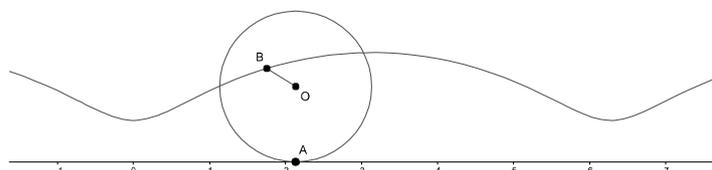
Se $b = R$, temos a cicloide mostrada anteriormente. Se $b > R$, teremos curvas chamadas cicloides alongadas. Se $b < R$, teremos curvas conforme a Figura 19, as chamadas cicloides reduzidas

Figura 18 – Trocoide com $b > R$



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

Figura 19 – Trocoide com $b < R$



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

Na primeira etapa da investigação, a experimentação, consideremos inicialmente a cicloide (caso $b = R$). Apesar de conhecermos sua forma parametrizada e já demonstramos alguns resultados que são apresentados nesta investigação, vamos construí-la através da definição, utilizando apenas ferramentas

do GeoGebra, demonstrando assim que é possível investigar uma curva sem conhecer sua forma parametrizada forma. Os passos para construir a cicloide são:

- Crie inicialmente qualquer ponto A; este será o ponto de contato entre o círculo e uma linha paralela ao eixo x;
- Crie um controle deslizante r que determinará o raio do círculo;
- Crie o centro O do círculo com o comando $O = A + (0,1) * r$. Observe que AO é paralelo ao eixo y;
- Crie o círculo com centro O passando por A;
- Crie o ponto B no círculo usando o comando.

$B = \text{Girar}(A, -x(A)/r, O)$.

Ao mover o ponto A, o ponto B gira em torno da circunferência causando a ilusão de deslizar na direção do eixo x.

Como o comando Locus não permite criar uma reta tangente a uma curva dada por ele, podemos criar uma sequência de pontos com o comando Sequence e obter uma aproximação da cicloide com o comando Spline. Para isso, precisamos criar uma ferramenta que retorne as coordenadas do ponto B para cada ponto A.

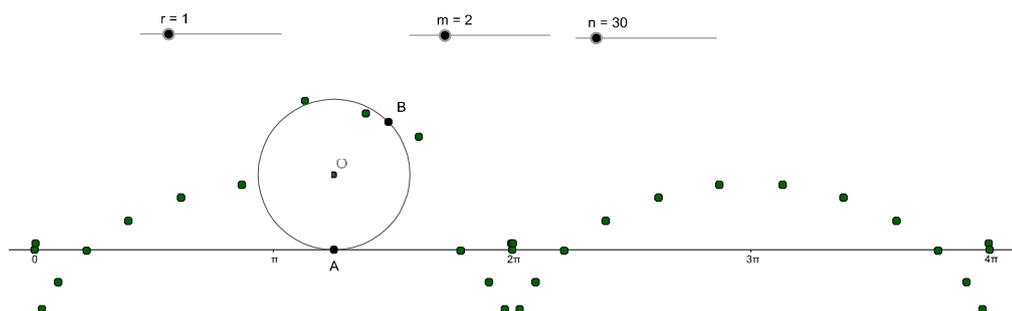
- Vamos criar a ferramenta CycloidPoints, cujo o objeto final é o ponto B e os objetos iniciais são o ponto A e o número r;
- O próximo passo é vincular o ponto A ao eixo x. Para isso use o comando $A = \text{Point}(X\text{axis})$;
- Crie controles deslizantes de inteiro positivo m e n. O controle m determinará o número de revoluções completas da circunferência em torno do eixo x, enquanto o controle n determinará o número de pontos na cicloide.

É importante que $n \geq 3$, porque, então usaremos o comando Spline para interpolar a curva.

- Use o comando $L = \text{Sequence}(\text{CycloidPoints}((2 * \text{Pi} * r * m * i / n, 0), r), i, 0, n)$ para criar o conjunto L contendo n + 1 pontos pertencentes à cicloide em o intervalo $[0, 2\pi r m]$. Consulte a Figura 20.
- Para criar a curva, use o comando $a = \text{Spline}(L)$.

Mais sobre o texto original É necessário fornecer o texto original para ver mais informações sobre a tradução enviar comentários dor lateral.

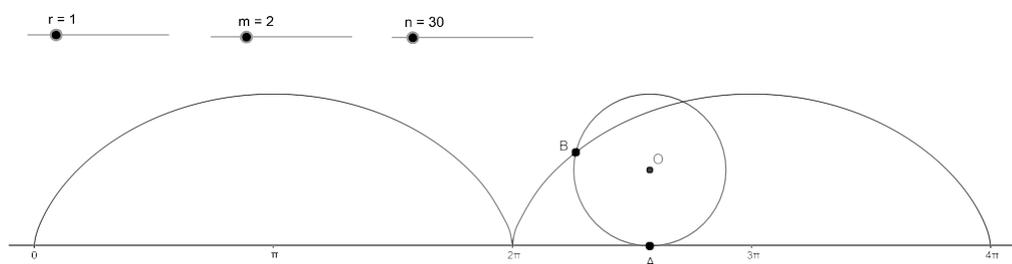
Figura 20 – Pontos da lista L



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

Ocultando o conjunto (lista) L , temos, finalmente, a cicloide, como podemos ver na Figura 21.

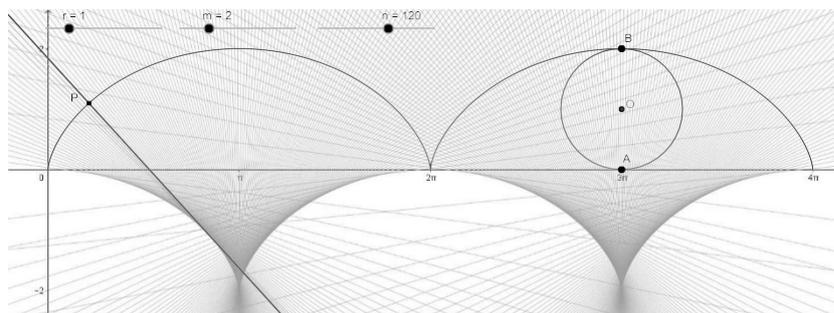
Figura 21 – Aproximação da Cicloide pelo comando Spline



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

- Repetindo os passos e ocultando a reta tangente, obtemos a envolvente das retas normais à cicloide. O resultado pode ser visualizado na Figura 22.

Figura 22 – Retas tangentes à Evoluta da Cicloide



Fonte: Amanda Felix Oliveira (2020)

Analisando a Figura 23, pode-se observar que a envolvente da cicloide também é uma cicloide, pois a envoltória das linhas normais possui um traço semelhante a uma cicloide.

3.2.9 Interfaces entre as tecnologias e as Teorias Desenvolvimentista

É fato que a tecnologia está presente em todas as camadas da sociedade atual. A escola, como espaço social marcado pela diversidade, não pode mais se limitar à tecnologia fornecida pelos alunos e sua facilidade de acesso. Daí a necessidade de refletir sobre o processo educacional para integrar o ensino da matemática com a tecnologia (PURIFICAÇÃO; PESSOA, 2015).

É possível fazer a interface entre ensino, tecnologia e a teoria do desenvolvimento utilizando a atividade de estudo. Davydov (1988), reforça que a atividade de estudo é uma das principais atividades humanas. Deve ser utilizada num processo de ensino e aprendizagem, para ajudar a organizar um projeto educativo que pretenda envolver os alunos permitindo-lhes integrar e organizar ideias (BRITO; BRITO, 2019).

Nesse contexto de organização de ideias, o software GeoGebra surge como uma importante ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da matemática, principalmente em conteúdo que exigem que os alunos visualizem como curvas planas. O GeoGebra é fácil de usar e conta com diversos centros que oferecem suporte e ajuda caso você tenha dúvidas sobre seu gerenciamento (MIYASAKI, 2017).

No entanto, é importante ressaltar que para o professor utilizar o GeoGebra, assim como qualquer outro software, é necessário que ele domine totalmente as

ferramentas utilizadas no processo de ensino-aprendizagem, pois nem sempre as construções são fáceis e simples. Todavia, é necessário, além de dominar as ferramentas utilizadas, ter amplo domínio e conhecimento da Matemática (MIYASAKI, 2017).

De maneira geral, o software GeoGebra facilitou a compreensão dos conceitos observados e a visualização das representações gráficas e das características algébricas e geométricas dos objetos analisados. Essa prática uma vez desenvolvida com os professores, pode incentivar o aluno a buscar evidências e caminhos adequados para soluções de suas atividades (SILVA, 2020).

No entanto, é fundamental que o professor, ao utilizar o software GeoGebra nas aulas de matemática, seja cuidadoso e cuidadoso no planejamento de suas aulas, pois a presença do software em sala de aula é um recurso metodológico para melhorar o processo de ensino. De forma a reforçar a aprendizagem significativa e qualitativa por meio da manipulação, visualização e construção do material, sem substituir o papel do professor de apresentar, explicar e transmitir informações aos seus alunos (CATANEO, 2011).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve por objetivo verificar a utilização do uso do software GeoGebra na aplicação de curvas planas e no desenvolvimento matemático. Podemos dizer que os objetivos deste trabalho foram cumpridos, pois conseguimos discutir sobre o estudo de curvas planas e seus gráficos utilizando recursos do GeoGebra, o que na maioria das vezes facilitou os resultados obtidos. A implementação deste trabalho permitiu analisar como o software GeoGebra pode aprimorar o conhecimento matemático, desenvolver habilidades práticas baseadas em teorias contínuas e integrais, como Vaz (2012), no desenvolvimento de escores experimentais, conjecturas, formalização e generalização. Introduzimos a construção, com conceitos matemáticos e ferramentas de software, que nos permitiram fazer investigações matemáticas de uma forma mais atrativa. Mostramos que o software permite um aprendizado importante, devido à sua eficácia, o que facilita a percepção do aluno sobre as características e relações entre objetos matemáticos.

Agregou-se a este estudo a aplicação do conceito de curvas planas a partir do uso do software, onde constatou-se, por meio da literatura e de trabalhos anteriormente realizados, que GeoGebra pode contribuir de forma significativa na aplicabilidade desse conteúdo e, no processo de aprendizagem de alunos, que de forma lúdica poderá acompanhar o posicionamento de um ponto na estrutura da curva, de forma a compreender não apenas os traços que são demarcados, assim como os demais elementos que estabelecem liames com o conteúdo das curvas planas, dos quais citamos sua velocidade, aceleração e coordenadas.

Realizamos a pesquisa com as leituras e estudos de diversos autores como Davydov, Vygotsky, Libânio, Vaz e sobre a presença das tecnologias da informação no processo de ensino-aprendizagem da matemática; teoria histórico-cultural; o avanço das tecnologias da informação aplicadas ao ensino da matemática; transposição didática, bem como o estudo do software GeoGebra. Essas leituras ofereceram a pesquisadora bases teóricas para o desenvolvimento de sequências didáticas, por meio das quais se buscou a compreensão do objeto de pesquisa.

As perspectivas de Engestrom (2002) e Soares (2007) sobre o processo histórico-cultural abriu um amplo leque de respostas para este trabalho, das quais pontuamos a percepção de Davydov (1988) que encontrou apoio e esforços para construir e responder uma problemática, ainda que pequena e se faz necessária

uma estrutura da atividade do aprender incluindo uma tarefa de aprendizagem, as ações de aprendizagem e ações de acompanhamento e avaliação, visando à compreensão do objeto de estudo em suas relações. O resultado disso é que os alunos aprendem como pensar teoricamente a respeito de um objeto de estudo e, com isso, formar um conceito teórico apropriado desse objeto para lidar praticamente com ele em situações concretas da vida.

Fizemos uma discussão teórica sobre o tema e acreditamos que este estudo aprofundado, poderá colaborar com produção de pesquisa futura em que seja possível vivenciar uma experiência prática, que envolve tecnologias (GeoGebra).

Apresentamos um estudo que permite a aproximação de métodos de ensino moldados pela pesquisa matemática e o desenvolvimento de uma educação de qualidade, cujo objetivo principal é gerar mudanças, sobretudo nas percepções dos alunos, refinar sua atividade mental e despertar seu interesse pela ação e reflexão por contato visual.

Acreditamos que os objetivos propostos foram atingidos, e que a questão como a teoria do desenvolvimento pode contribuir para o desenvolvimento matemático dos alunos, utilizando o software GeoGebra na aplicação do conteúdo de Curvas Planas, como dispositivo pedagógico, foi contemplada ao longo do texto que culmina nesta dissertação.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. D. de. **O software GeoGebra numa proposta de formação continuada de professores de matemática do ensino fundamental**. 2017. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2017.
- ARAÚJO, L. C. L. de; NOBRIGA, J. C. C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Exato, 2010.
- AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.
- BERTI, N. M. O Ensino de Matemática no Brasil: aspectos para uma compreensão histórica - VI Jornada Nacional do HISTEDBR. **Anais [...]**. Ponta Grossa – PR: UEPG, 2005.
- BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- BRITO, L. S. de S.; BRITO, S. de S. Teoria do ensino desenvolvimental: contribuições para a formação de conceitos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental - VI CONEDU. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Editora, 2019.
- CATANEO, V. I. **O uso do software Geogebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais**. 2011. 86 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro Universitário Barriga Verde, Orleans, 2011.
- DAMAZIO, A. **O desenvolvimento de conceitos matemáticos no processo extrativo do carvão**. 2000. 197 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- DAVYDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.
- DAVYDOV, V. V. **Problems of Developmental Teaching: The Experience of Theoretical and Experimental Psychological Research – Excerpts**. New York, USA: Soviet Education, 1988.
- ENGESTRÖM, Y. Aprendizagem por expansão na prática: em busca de uma reconceitualização a partir da teoria da atividade. **Cadernos de Educação Universidade Federal de Pelotas**, ano 11, n. 19, p. 31-64, jul./dez. 2002.
- FREITAS, R. A. M. da M. Aprendizagem e formação de conceitos na teoria de Vasili Davydov. In: LIBÂNEO, J. C.; SUANNO, M. V.; LIMONTA, S. (Orgs.). **Concepções e práticas de ensino num mundo em mudança: diferentes olhares para a didática**. Goiânia: CEPED Publicações, 2011.
- FREITAS, R. A. M. da M.; ROSA, S. V. Ensino Desenvolvimental: contribuições à superação do dilema da didática. **Educação e Realidade**, v. 40, n. 2, p. 613-627, 2015.

GARCIA, C. M. Pesquisa sobre formação de professores: o conhecimento sobre aprender e ensinar. **Revista Brasileira de Educação**, Campinas, n. 9, p. 51-75, 1998.

GEOGEBRA. **GeoGebra Manual**. 2020. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/pt/Manual>. Acesso em: 14 mar. 2021.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana: um estudo com o software Geogebra**. Maringá, PR: Eduem, 2010.

GRYMUZA, A. M. G.; RÊGO, R. G. A Teoria da Atividade: uma possibilidade no ensino de matemática. **Revista Temas em Educação**, João Pessoa, v. 23, n. 2, p. 117-138, jul./dez. 2014.

HUBERMAN, M. O ciclo de vida profissional dos professores. *In*: NÓVOA, A. (Org.). **Vidas de professores**. Portugal: Porto Editora LDA, 2000.

LAWRENCE, J. D. **A catalog of special plane curves**. New York, USA: Dover Publications, 1972.

LEONTIEV, A. N. **Activity, consciousness and personality**. Englewood Cliffs, EUA: Prentice-Hall, 1978.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Tradução de Rubens Eduardo Frias. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LIBÂNEO, J. C. **Questões de metodologia do Ensino Superior: a teoria histórico-cultural da atividade de aprendizagem**. Goiânia: UCG, 2003.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico – cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 5-24, set./out./nov./dez. 2004.

LIBÂNEO, J. C. **Teoria Histórico-Cultural: objetivações contemporâneas para o ensino, a aprendizagem e o desenvolvimento humano**. Texto da conferência de abertura da VII Jornada de Ensino de Marília, Curso de Pedagogia da UNESP-Marília, 12 a 14 de agosto, 2008.

LIBÂNEO, J. C. A teoria do ensino para o desenvolvimento humano e o planejamento de ensino. **Revista Educativa**, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, A. M. da M. **Vygotsky, Leontiev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática**. Eixo temático 3. Cultura e práticas escolares. 2016. Disponível em: <https://docplayer.com.br/11604458-Vygotsky-leontiev-davydov-tres-aportes-teoricos-para-a-teoria-historico-cultural-e-suas-contribuicoes-para-a-didatica.html>. Acesso em: 22 jan. 2022.

LOMPSCHER, J. A atividade de aprendizagem e sua formação: ascensão do abstrato ao concreto. *In*: HEDEGAARD, M.; LOMPSCHER, J. (Orgs.). **Learning activity and development**. Aarhus: Aarhus University Press, 1999.

LONGAREZZI, A. M.; FRANCO, P. L. J. A. N. Leontiev: a vida e a obra do psicólogo da atividade. In: LONGAREZZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia, MG: EDUFU, 2013. p. 68-110.

MIYASAKI, R. **Um estudo de curvas planas utilizando o GeoGebra**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

MOURA, M. O. de *et al.* Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educativo**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

NÓVOA, A. (Org.). **Profissão professor**. Tradução de Irene Mendes, Regina Correia e Luísa Santos Gil. Portugal: Porto Editora LDA, 1995.

NUNES, T.; CARRAHER, D.; SCHLEIMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

OLIVEIRA, M. P. de. **Aplicações do software Geogebra ao ensino de funções**. 2018. 114 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

PERES, T. de C.; FREITAS, R. A. M. de M. Ensino desenvolvimental: Uma alternativa para educação matemática. **Poiésis**, Tubarão, v. 8, especial, p. 10-28, jan./jun. 2014.

PERES, T. F. de C. *et al.* Matemática no Ensino Médio: ensino para a formação de conceitos e desenvolvimento dos alunos. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 8, n. 1, p. 173-196, jan./jun. 2013.

PERES, T. F. de C. **Volume de sólidos geométricos: um experimento de ensino baseado na teoria de V. V. Davydov**. 2010. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2010.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. **Mathematics Education Research Journal**, Austrália, v. 13, n. 1, p. 28-46, 2001.

PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Orgs.). **Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito**. São Paulo: Cortez, 2002.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemática na sala de aula**. 3. ed. rev. e ampl. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PURIFICAÇÃO, M. M. **O professor estagiário de pedagogia e o desenvolvimento do conhecimento pedagógico e tecnológico do conteúdo no ensino de matemática nos anos iniciais: experiência formativa em uma IES do sudoeste de Goiás/Brasil**. 2022. 310 f. Tese (Doutorado em Ensino) – Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, 2022.

PURIFICAÇÃO, M. M.; PESSOA, T. O ensino da matemática em meio à tecnologia: desafio aos programas de formação de professores. **Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, Canoas, v. 4, n. 2, 2015.

REGO, T. C. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 18. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

SFORNI, M. S. de F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino**: contribuições da teoria da atividade. Araraquara, SP: JM Editora, 2004.

SOUZA, U. B. **Guia de Comandos do GeoGebra**: Exemplos e Desafios. Projeto do Instituto GeoGebra em Goiás. Goiânia, 2018.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. v. 2.

TAPP, K. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer International Publishing, 2016.

TARDIF, M. E. **Saberes docentes e formação profissional**. Tradução de Francisco Pereira. 4. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. rev. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

VAZ, D. A. de F. Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: Articulando Investigação Matemática com o Geogebra. **Revista Educativa**, Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.

VYGOTSKY, L. S. **Formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução de Maria da Penha Villa Lobos. 9. ed. São Paulo: Ícone, 2005.